

Université Fédérale



Toulouse Midi-Pyrénées

# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Disciplines ou Spécialités : *Mathématiques appliquées et Électromagnétisme*

---

---

Soutenue publiquement le 01 Février 2016 par :

**Satafa SANOGO**

**Conception Optimale de Circuits Magnétiques dédiés à la Propulsion  
Spatiale Electrique par des Méthodes d'Optimisation Topologique**

---

---

## JURY

MARTIN PHILIP BENDSØE	Professeur d'Université, Technical University of Denmark	Président du Jury
JEAN-LOUIS COULOMB	Professeur d'Université, Institut National Polytechnique de Grenoble	Rapporteur
EDOUARD OUDET	Professeur d'Université, Université Joseph Fourier Grenoble	Rapporteur
FRÉDÉRIC MESSINE	Maître de Conférences, ENSEEIH-INT	Directeur de thèse
CAROLE HÉNAUX	Maître de Conférences, ENSEEIH-INT	Co-Directrice de thèse
LAURENT GARRIGUES	Directeur de Recherche au CNRS au LAPLACE, Toulouse	Examineur
OLIVIER RUATTA	Maître de Conférences, Université de Limoges	Examineur
RONAN PERRUSSEL	Charge de Recherche au CNRS au LAPLACE, Toulouse	Examineur
CLAUDE BONIFACE	Ingénieur, CNES, Toulouse	Invité
RAPHAËL VILAMOT	Ingénieur, Liebherr Toulouse	Invité

---

**Ecole Doctorale :**

*Génie Electrique, Electronique, Télécommunications (GEET)*

**Unité de Recherche :**

*LAPLACE - GREM3 - CNRS - UMR 5213*



*A mes très chers parents adorés (**Babas, M’Nah**),  
à mes frères **Bagnoumana, Bamourou et Abass**  
(les trois Fantastiques dont **je** suis le quatrième),  
à mes oncles **Oumarou et Yahaya Djakalia**,  
à la famille **SANOGO** :  
Tamahro-Kôrô/Tounouma/Darsalamy/Bobo-Dioulasso,  
à la famille **NOUMA** : Koguê.*

Aw Ni Tchié, Aw Sôrô Lo.

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}(S \times S) = \bigcup_{n \geq 1} \big( \bigcap_{t \in S^2} \mathbb{B}(t, \int 2s ds(n)) \big) \\ \Downarrow \\ \textcolor{blue}{S} \textcolor{blue}{A} [ + (\textcolor{blue}{N} + \textcolor{blue}{G}) \textcolor{blue}{O} + (\textcolor{blue}{T} + \textcolor{blue}{F}) \textcolor{blue}{A} ] \\ \Downarrow \\ \frac{\partial S \textcolor{blue}{ang}}{\partial \tilde{a}}(\tilde{a}, \tilde{a}) + \frac{\partial S \textcolor{blue}{at} f}{\partial \tilde{a}}(\tilde{a}, \tilde{a}) = \nabla \circ \Delta S^2 \\ \hline \img{img alt="A circular logo with a central shield. The shield is divided into four quadrants: top-left is red, top-right is green, bottom-left is blue, and bottom-right is yellow. The shield is surrounded by a white border containing text in a circular arrangement. The entire logo is set against a black background." data-bbox="758 625 811 670"/>$$



# Remerciements

Al-Hamdou Lillahi Rabbi Al-Alamina, je remercie par ces mots le Tout Puissant, Le Très Miséricordieux de m'avoir accordé tout ce qui est nécessaire et indispensable à l'accomplissement de ces travaux. Ensuite, je remercie ma famille, en particulier mes parents (qui sont mes primitives).

Je remercie mes enseignants de l'école primaire (qui m'ont aidé à faire mes premiers pas sur ce long chemin et délicat!), des lycées, des universités et toutes les personnes qui m'ont permis d'apprendre quelques choses et ou d'accéder à une connaissance directement ou indirectement.

Je tiens à remercier grandement Frédéric MESSINE et Carole HÉNAUX maîtres de Conférence pour la confiance qu'il m'ont accordée en me proposant cette thèse. Mon encadrement était bicéphale avec Frédéric à l'optimisation et Carole à l'électromagnétisme, c'est ce duo gagnant qui a permis à l'aboutissement de cette thèse. Une fois de plus merci pour votre sympathie, votre enthousiasme, votre générosité, et votre disponibilité. Par ces travaux, vous avez su inculquer en moi plus de passion pour ce métier de chercheur à travers votre professionnalisme, le partage de vos expériences, et nos échanges fructueux. Ravis de travailler avec vous.

Je tiens à remercier le professeur émérite Jean-Louis COULOMB et le professeur Édouard OUDET d'avoir accepté de rapporter ma thèse et de donner les premiers points de vue extérieurs. Mes chers professeurs, vous avez accompli un énorme boulot en lisant minutieusement mes travaux. J'ai beaucoup apprécié vos commentaires, vos remarques, et vos contributions pour apporter plus de précision sur certains aspects. Merci Pr. J.-L. COULOMB pour votre sympathie, et de m'avoir accordé une partie de votre temps si précieux pour échanger sur des détails en ce qui concerne la réalisation concrète du Propulseurs à Effet Hall (PEH).

Je tiens à remercier le professeur Martin Philip BENDSØE, je suis très honoré par l'acceptation et votre présence dans mon jury de thèse. Il faut admettre qu'en matière d'optimisation topologique vous êtes une référence internationale, un des pionniers à proposer des méthodes numériques efficaces et robustes en vue de la conception optimale structurale. Vos travaux ont été sources d'inspiration pour beaucoup de chercheurs, en particulier pour moi qui est si nouveau dans le domaine.

Je teins à remercier Laurent GARRIGUES directeur de recherches CNRS, d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Vous êtes indirectement

un encadrant pour moi. En effet, j'ai travaillé lors de mon stage de Master II sous la direction de R. Vilamot qui vous avez été le co-directeur de thèse.

Je tiens à remercier Ronan PERRUSSEL chargé de recherches CNRS, à la fois d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et les échanges relativement à mes activités de recherches et aussi d'enseignement. Merci infiniment pour la lecture de mes articles et du présent manuscrit, merci aussi pour vos précieux conseils, vos aides et vos encouragements à des moments où j'en avais besoin.

Je tiens à remercier Claude BONIFACE et Raphaël VILAMOT respectivement ingénieur chez CNES et Liebherr Toulouse, je suis très ravis par votre acception de participer à mon jury de thèse et par votre intérêt pour la propulsion spatiale électrique. Merci R. VILAMOT, cette histoire a commencé avec toi, merci de m'avoir mis dans cette navette spatiale propulsée par un PPS-Flex :).

Je tiens à remercier Olivier RUATTA maître de Conférence à XLIM, d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Merci pour l'invitation et l'accueil chaleureux à Limoges, sans oublier les restos.

C'est avec plaisir que je profite maintenant de ces lignes pour exprimer ma reconnaissance et ma gratitude au Professeur Nouredine IGBIDA à XLIM, pour sa générosité et l'accueil chaleureux en France, car il a été ma famille en France. De plus, c'est lui qui m'a initié en optimisation de forme avec ses cours dans le Master II ACSYON.

Je remercie Samir ADLY, Paul ARMAND, Paola BOITO, Olivier PROT, Olivier RUATTA, Benoît CRESPIER, Jacques Arthur WEIL qui ont aussi été mes professeurs à l'université de Limoges, sans oublier Henri MASSIAS Ingénieur de Recherche du XLIM/DMI.

Je tiens également à remercier mes professeurs de l'université polytechnique de Bobo-Dioulasso (UPB) à l'institut des sciences exactes et appliquées (ISEA) Stanislas OUARO, Sado TRAORÉ, Aboudramane GUIRO, Safimba SOMA qui m'ont permis d'obtenir une bourse Française pour continuer mes études à l'université de Limoges. Merci pour la confiance que vous avez accordée, pour votre simplicité, pour votre hospitalité et pour votre disponibilité (pour les différentes démarches administratives). J'espère que nos thèmes de recherches nous permettrons de travailler ensemble dans les jours avenir.

Ensuite, je remercie mes professeurs de l'ISEA Théodore TAPSOBA, Moussa OUATTARA, Joseph BAYARA, Idrissa KABORÉ, Ahmed D. SERRÉ, Boureima SANGARÉ, Jean De Dieu W. ZABSONRÉ, Adama OUÉDRAOGO, Jean-Louis ZERBO, Ismaël NIANKINI, Inoussa MILLOGO, Michel B. SOMÉ, Honoré K. OUOBA et tous les professeurs et le personnel de l'UPB.

*À la mémoire du Professeur Akry KOULIBALY.*

Mes chers professeurs vous avez su me transmettre la passion, pour les études, la recherche scientifique et en particulier dans le domaine des Mathématiques.

Je tiens à remercier aussi tous les membres du GREM3 : Dominique HARRIBEY (pour les magnifiques photos du moteur plasmique et pour la video de ma soutenance de thèse), François PIGACHE, Yvan LEFÈVRE, Jean-François ROUCHON, Éric DUHAYON, Jean-François LLIBRE.

Au LAPLACE, mes remerciements à toutes les équipes, en particulier Maria David (directrice de la GEET), Nathalie RAVEU, Anne-Laure FRANC, Jean-René POIRIER, Gaëtan PRIGENT, Olivier PIGAGLIO et leurs collègues.

Mes remerciements vont également aux collègues de mon directeur Messine : le professeur émérite Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY, Sonia CAFIERI, Jordan NININ, Sandra U. NGUEVEU, et tous les membres et participants de SPOT (Séminaire Pluridisciplinaire d'Optimisation de Toulouse), de ROAD-T (Recherches Opérationnel/Aide à la Décision dans la région Toulousaine).

Je tiens à remercier les personnels administratifs qui par leur disponibilité ont su faciliter toutes les tâches bureaucratiques. Un grand merci donc à Valérie Schwarz, Cécile Daguillanes, Catherine Moll-Mazella, Carine Bastié, Jessica Toscano, Audrey Cathala et Sylvie Armengaud-Metche « SAM » (secrétaires de l'IRIT-N7). Un grand merci également à Jacques Bénéaïoun et David Bonnaïous les informaticiens du laboratoire LAPLACE site ENSEEIHT qui nous permettent au quotidien de travailler en toute quiétude.

Il est temps de remercier mes collègues thésards et jeunes docteurs du LAPLACE : Léon Havez, Jean-François Allias, Thomas Delphin, Thomas Martin, Damien Jarrot, Maël Mesurolle, Alberto Rossi, Cédric Lopez, Nicolas Rivière, Gervan Jodin, Etienne Fournier.

Merci à mes collègues de bureau, Julien Fontaine, Pedro Rynkiewicz, Alexandre Giraud. Merci pour la bonne ambiance et les discussions surtout sur l'histoire et les cultures, sans oublier le pot départ que vous avez organisé pour moi. Merci.

Je tiens à remercier Thao Le Luong (LAPLACE), Thierry Boitrel (ingénieur chez EDF France), Carlos Sureda Gutiérrez doctorant à Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (IRIT) Équipe Systèmes Multi-Agents Coopératifs (SMAC), Université Toulouse 1 Capitole, vous êtes des amis très sympathiques.

Je tiens à remercier chaleureusement Priscillia DAQUIN (LAPLACE) et Maha AL-SOUDANI (Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions (LMDC), UPS, UFR-PCA, INSA Toulouse) pour la très bonne organisation du pot de thèse. Merci beaucoup pour votre aide et vos contributions respectives pour la réussite de ce buffet!!!

Je tiens à remercier mes collègues, amis et compatriotes Burkinabè Thomas Karfo, Aziz Cissoko, Kouka Amed Jérémy Ouédraogo, Jean-Baptiste et tous les membres de la AEFAT (Association des Etudiants du Faso à Toulouse) pour les bons moments que l'on a partagé ensemble et le soutien et les encouragements que vous m'avez apporté le jour de ma présentation.

Je tiens à remercier mes amis : Traoré Urbain, Somé K. Cédric « Doc-So », Ouédraogo Oumarou « Yaradoa, l'homme au doc sacré », Barro Moussa, Ouédraogo Ali « Naba », Kientéga Boukary, Soma Mifiamba, Kokonbo Hamidou, Ouattara Siaka, Sanou Bakary « Sabak, le Japonais », Isaï Lankoandé, Sayouba Ouédraogo, Vini Yves Bernadin Loyara « Mon Sergent », Sankara Karim « Krimo » et tous les éléments de l'UPB/ISEA/MPI (Mathématiques Physique Informatique, et les éléments de ma promo de la T<sup>le</sup>C du Lycée Ouézzin Coulibaly de Bobo-Dioulasso (il faut que l'on se retrouve un jour autour du plat TC) ; c'est de la part de  $S \times S = S^2$ .

Finalement, je remercie Sanogo Koromoulaye, Sanogo Abass, Nouma Moussa, Nouma Mahama, Nouma Yacouba, Sanogo Balimamy, Sanogo Bassirima, Sanogo Souleymane (les futures scientifiques de la famille).

Je remercie tous ceux et toutes celles qui ont connu de près ou de loin, directement ou indirectement ma petite personne.

*Merci Beaucoup !*

**Mr. Satafa SANOGO**



# A ma thèse

À toi ma thèse, Tu es libre maintenant. Depuis plusieurs années, tu étais logée en moi, dans mon esprit et dans mes entrailles. Tu m'as souvent empêché de voir les miens, transformé mes nuits en blanches. Tu m'as aussi permis de faire de belles rencontres, d'acquérir des connaissances et de l'expérience non seulement scientifiques mais aussi *celles de la vie de tous les jours*, de voyager un peu partout dans le monde *en quête de savoir*. À propos, Luc disait : « Et moi, je vous dis : Demandez, et l'on vous donnera ; cherchez, et vous trouverez ; frappez, et l'on vous ouvrira. » (Luc 11 :9). À toi ma thèse, il faut que tu saches que :

- *La connaissance scientifique n'a ni origine, ni couleur, ni âge, ni religion. Elle existe tout simplement et peut-être acquis par tout(e) terrien(ne).*
- *Il y aura la paix et la stabilité durable dans ce monde si et seulement si chaque personne en tant que individu évite de faire aux autres ce qu'il n'aime pas qu'autrui lui fasse.*

Enfin, à toi ma thèse, je te dédie la formule ci-dessous en souvenir, sous la forme de théorème de la « thèse optimale », comme suit :

$$\left( \mathfrak{P}_{\text{doctorat}} \right) \left\{ \begin{array}{l} \max_{\text{Act.th}_\uparrow} \min_{\text{Act.th}_\downarrow} \sum_{\xi \in \{\text{Doc}, \text{Dirs}, \text{Cols}\}} [\mathcal{C}_\xi \cdot \text{Travail}_\xi + \text{Social}_\xi + \mathcal{R}_\xi], \quad (1) \\ \text{Sous Contraintes :} \\ \text{Act.th}_\uparrow > \text{Act.th}_\downarrow, \quad (2) \\ \text{Travail}_\xi(\text{Act.th}_\uparrow, \cdot) > 0, \quad \forall \xi \in \{\text{Doc}, \text{Dirs}, \text{Cols}\}, \quad (3) \\ \text{Travail}_\xi(\text{Act.th}_\uparrow, \text{Act.th}_\downarrow) > \text{Social}_\xi(\text{Act.th}_\uparrow, \text{Act.th}_\downarrow), \\ \quad \forall \xi \in \{\text{Doc}, \text{Dirs}, \text{Cols}\}, \quad (4) \\ \text{Travail}_\xi \gg \mathcal{R}_\xi, \quad \forall \xi \in \{\text{Doc}, \text{Dirs}, \text{Cols}\}, \quad (5) \\ \mathcal{C}_\xi \in \text{Sp.Th} \cap \text{Pb.Th}, \quad \forall \xi \in \{\text{Doc}, \text{Dirs}\}, \quad (6) \\ \exists \mathcal{C}^* \in \text{Pb.Th} / \mathcal{C}^* = \mathcal{C}_{\text{Cols}}, \quad (7) \\ \text{Kl}(\text{Doc}) \geq \text{ED}(\text{frmtn}), \quad (8) \\ \text{Km}(\text{Doc}) \geq \text{ED}(\text{cnfrc}), \quad (9) \\ \text{Sw}(\text{Doc}) \geq \text{ED}(\text{ppr}), \quad (10) \\ \text{Shn}(\text{Doc}) \leq \text{Sawa}_F, \quad (11) \\ \forall (\xi, \zeta) \in \{\text{Doc}, \text{Dirs}, \text{Cols}\}^2 \exists \mathcal{R}_{\text{equiv}}^{\text{Symp}} / \xi \mathcal{R}_{\text{equiv}}^{\text{Symp}} \zeta, \quad (12) \\ \exists \mathcal{R}_{\leftarrow}^{\text{Passion}} / \xi \mathcal{R}_{\leftarrow}^{\text{Passion}} \text{Th}, \quad \forall \xi \in \{\text{Doc}, \text{Dirs}, \text{Cols}\}. \quad (13) \end{array} \right.$$



# Avant-Propos

Ce document est une synthèse de mes travaux de thèse de doctorat sur les problèmes de conception optimale des circuits électromagnétiques pour les propulseurs plasmiques par des méthodes d'optimisation Topologique. Travaux ont été effectués au sein du Laboratoire plasma et conversion d'énergie (LAPLACE) dans l'équipe Groupe de Recherche en Electrodynamique (GREM3) affilié à l'Université Toulouse III – Paul Sabatier.

L'objectif de ces travaux est le développement et l'élaboration de méthodes et de modèles pour la résolution des problèmes de conception optimale de circuits électromagnétiques. Les modèles théoriques proposés sont généraux et les phénomènes que régissent aux seins de ces dispositifs sont gouvernés par des équations de Maxwell (qui sont des EDPs du second ordre). Nous avons appliqué notre approche d'optimisation numérique à des problèmes de conceptions en 2D représentant des sections plane dans un domaine référentiel au système de coordonnées cartésiennes.

Pour la résolution numérique du problème de conception optimale traité, les logiciels de calculs scientifiques FEMM (pour la résolution des modèles d'électromagnétisme) et Matlab (pour le module d'optimisation algorithmique). Par la suite la méthode de densité SIMP a été utilisé intégrant des schémas d'interpolation de matériaux généralisés que nous avons proposé dans le cadre de cette thèse afin de résoudre efficacement les problèmes d'électromagnétisme. Les schéma d'interpolations initiaux étant plus dédiés aux problèmes purement mécanique. Nos approches sont toujours validées à travers des cas tests de conception optimale de systèmes électromagnétiques. Ces travaux ont fait l'object de plusieurs communications scientifiques notamment des articles de revues internationales, de conférences internationales et nationales.

Dans ce manuscrit, il y a dans les bas de pages une courte biographie des pionniers dans les recherches scientifiques (en ce qui concerne les notion abordées). À travers ces historiques, je rend hommage à ces savants qui ont contribué considérablement aux progrès scientifiques et technologiques. À propos, Auguste Comte (1798-1857) disait : « *On ne connaît pas complètement une science tant qu'on n'en sait pas l'histoire* ». Ces biographies sont référencées Wikipédia.



# Résumé

Dans le domaine de la propulsion spatiale électrique, le propulseur à effet Hall (PEH) constitue une solution très attractive pour les missions interplanétaires et le contrôle d'orbite du satellite. Cependant, les performances du propulseur sont directement liées au champ magnétique généré dans le canal plasma et donc à la topologie générale du circuit magnétique.

Les problèmes de conception de circuits magnétiques des PEHs sont des problèmes inverses d'électromagnétisme. Nous les formulons sous la forme de MINLP (Mixed Integer Nonlinear Program). Les modèles élaborés sont des problèmes d'optimisation non convexes, dont les contraintes sont des équations aux Dérivées Partielles d'électromagnétisme (équations de Maxwell), des contraintes physiques notamment sur le poids/volume, de la géométrie et de la topologie des pièces du moteur. De plus, ces problèmes de conception optimale de dispositifs électromagnétiques sont très difficiles à analyser et à résoudre. En effet, ils sont mal-posés au sens de Hadamard ; en particulier, ils présentent une faible stabilité et l'existence de solution n'est pas toujours garantie.

Ces problèmes de conception optimale sont résolus avec des méthodes d'optimisation structurale topologique basées sur des approches de distribution de densité de matériaux appelées méthode SIMP (Solid Isotropic Matériaux with Penalization). Dont, nous avons introduit une extension utilisant des schémas d'interpolation de matériaux polynomiaux généralisés appelée Mixed-SIMP (M-SIMP) plus spécifique à la résolution de manière efficace des MINLPs en "0-1".

Nous avons développé une famille de code d'optimisation appelée **ATOP** (Algorithme To Optimize Propulsion) et dédiée à la configuration magnétique optimale des PEHs. **ATOP** a été construit en utilisant une parallélisation des logiciels de calculs scientifiques FEMM (Finite Element Method Magnetics) pour la résolution des EDPs de Maxwell et MatLab pour le module d'optimisation. **ATOP** comporte les routines suivantes : (i) **ATOP<sup>TO</sup>** utilisant les algorithmes d'optimisation locale qui implémentent le gradient topologique de matériaux fournit ; (ii) **ATOP<sup>BBA</sup>** utilisant un algorithme d'optimisation globale de type Branch and Bound qui intègre des bornes inférieures du critère calculées via l'Arithmétique des Intervalles ; (iii) **ATOP<sup>BBA->TO</sup>** un code hybride obtenu en associant les deux codes précédents. Des exemples d'applications numériques ont permis de valider d'efficacité et la robustesse de nos approches.

**Mots clés :** Problème Inverse, équations de Maxwell, Optimisation Topologique, Analyse de Sensibilité, Optimisation Numérique, Algorithme Branch and Bound, électromagnétisme, Propulsion électrique, Propulseur à Effet Hall.



# Abstract

In space propulsion, the Hall Effect Thruster (HET) is a very attractive solution for interplanetary missions and orbit control of the satellite. However, the performance of the thrusters is directly related to the magnetic field generated in the plasma channel, hence that depends on the global topology of the magnetic circuits.

The considered design problems are inverse ones in electromagnetism. These inverse problems are formulated under the form of MINLP (Mixed Integer Nonlinear Program). The obtained models are non-convex optimization problems, and subject to constraints such as : Partial Differential Equations of Electromagnetism (Maxwell equations), including physical constraints on weight / volume, geometry and topology constraints on some pieces of the engine. Moreover, optimal design problems of electromagnetic devices are very difficult to analyze and to solve. Indeed, they are ill-posed in the sense of Hadamard ; in particular, they have low stability and existence of solution is not always guaranteed.

These optimal design problems are solved with topology optimization methods based on material density distribution approach called SIMP (Solid Isotropic Materials with Penalization). Thus, we have introduced new material interpolation scheme based on generalized polynomials called Mixed-SIMP (M-SIMP), more specific for solving efficiently MINLP in “ 0-1 ”.

We have developed a set of numerical optimisation code named **ATOP** (Algorithme To Optimize Propulsion) and dedicated to optimal magnetic configuration of HETs. **ATOP** is built by using in parallel two well-known scientific computation softwares namely : FEMM (Finite Element Method Magnetics) for solving associated PDEs ; Matlab for the optimization module. **ATOP** has the following packages : (i) **ATOP<sup>TO</sup>** based on local optimization algorithms, and implement a provided topological derivative ; (ii) **ATOP<sup>BBA</sup>** based on a global optimization algorithm (Brand and Bound) ; (iii) **ATOP<sup>BBA->TO</sup>** hybride code built from the two previous ones. Finally, some numerical applications are solved ; these results have allowed to validate the efficiency and robustness of our approaches.

**Keywords :** Inverse Problem, Maxwell Equations, Topology Optimization, Sensitivity Analysis, Numerical Optimization, Branch and Bound Algorithm, Electrical Propulsion, Hall effect Thruster.





# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>A ma thèse</b>	<b>v</b>
<b>Avant-Propos</b>	<b>vii</b>
<b>Résumé</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Propulsion Spatiale Électrique et Problématique de la Conception Optimale des Propulseurs à Effet Hall</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Propulsion Spatiale . . . . .	6
1.2.1 Différents Types de Missions Spatiales . . . . .	7
1.2.2 Grandeurs Caractéristiques : Poussée et Impulsion Spécifique . . . . .	7
1.2.3 Propulsion Chimique . . . . .	8
1.2.4 Propulsion Electrique . . . . .	9
1.3 Intérêt pour la Propulsion Electrique . . . . .	9
1.3.1 Maturité des Propulseurs Electriques . . . . .	12
1.3.1.1 Satellite Meteor et les Propulseurs SPTs . . . . .	12
1.3.1.2 Deep Space 1 (DS1) et le moteur NSTAR . . . . .	13
1.3.1.3 SMART-1 et le PPS-1350 . . . . .	13
1.4 Propulseurs à Effet Hall (PEHs) . . . . .	15
1.4.1 Eléments Constitutifs d'un PEH . . . . .	15
1.4.2 Principe de Fonctionnement d'un PEH . . . . .	16
1.5 Etat de l'Art de la Conception du PEH . . . . .	19
1.5.1 Influence de la Topologie général de l'Architecture d'un Propulseur Electrique sur son Fonctionnement . . . . .	19
1.5.1.1 Influence de la Géométrie de la Cathode . . . . .	19
1.5.1.2 Influence de la Géométrie du Canal Plasma . . . . .	20
1.5.1.3 Influence de la Topologie Magnétique . . . . .	21
1.5.1.4 Circuit Magnétique de Référence du PEH . . . . .	24
1.5.2 Problème de Conception Optimale du Circuit Magnétique pour les PEHs . . . . .	25

1.6	Conclusion . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Méthodes et Modèles d'Optimisation pour la Conception de Propulseurs Électriques</b>	<b>29</b>
2.1	Introduction . . . . .	30
2.2	Généralités et Notions Fondamentales . . . . .	30
2.2.1	Formalisme du Problème d'Optimisation . . . . .	30
2.2.1.1	Espace des Variables de Décision : Continu et Discret	31
2.2.1.2	Contraintes : Optimisation avec Contraintes et sans Contrainte . . . . .	32
2.2.1.3	Optimisation Linéaire, Convexe et Quadratique . . . . .	32
2.2.1.4	Différentiabilité du Problème en Optimisation . . . . .	32
2.2.2	Algorithmes d'Optimisation : Globale et Locale . . . . .	33
2.3	Optimisation Structurale . . . . .	35
2.3.1	Optimisation de Dimensionnement . . . . .	35
2.3.2	Optimisation de Forme . . . . .	35
2.3.3	Optimisation Topologique . . . . .	36
2.4	Outils d'Analyse : Espaces Fonctionnels et Opérateurs Différentiels	37
2.4.1	Définitions et Rappels . . . . .	38
2.4.2	Espaces de Lebesgue et Espaces de Sobolev . . . . .	39
2.4.3	Opérateurs Différentiels . . . . .	40
2.4.3.1	Opérateur Gradient . . . . .	41
2.4.3.2	Opérateur Divergence . . . . .	41
2.4.3.3	Opérateur Rotationnel . . . . .	42
2.4.3.4	Cas de la Dimension 2 . . . . .	42
2.5	Description et Mise en Place de Modèles de Simulations . . . . .	44
2.5.1	Modèles 2D pour la Simulation et le Design des PEHs . . . . .	44
2.5.2	Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques . . . . .	46
2.5.2.1	Cas de la Magnétostatique . . . . .	47
2.5.2.2	Utilisation des Aimants Permanents . . . . .	48
2.5.2.3	Réduction à la Dimension 2 des Champs Magnéto- statiques . . . . .	49
2.5.3	Problème Inverse en Magnétostatique . . . . .	50
2.5.4	Formulation du Problème . . . . .	51
2.5.5	Existence de Solutions pour le Problème de Design . . . . .	54
2.5.5.1	Analyse de la Sensibilité du Problème . . . . .	55
2.5.6	Interprétation Physique du Modèle Adjoint . . . . .	58
2.6	Conclusion . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Résolution Numérique du Problème de Conception Topologique par la Méthode de Densité de Matériaux</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	62
3.2	Généralités sur les Méthodes d'Optimisation Topologique . . . . .	62
3.3	Méthodes d'Optimisation Topologique . . . . .	63
3.3.1	Méthode de Gradient Topologique . . . . .	64
3.3.2	Méthode des Surfaces/Lignes de Niveaux . . . . .	66

3.3.3	Méthode d'Homogénéisation . . . . .	69
3.3.4	Méthode SIMP . . . . .	74
3.4	Formulation du Problème de Conception de PEHs pour le Modèle SIMP . . . . .	77
3.5	Résolution Numérique : le code d'Optimisation Topologique <b>ATOP<sup>TO</sup></b> . . . . .	78
3.5.1	Outils de Calculs . . . . .	79
3.5.2	Système de Maillages Utilisés . . . . .	80
3.5.3	Principe de Fonctionnement du code <b>ATOP<sup>TO</sup></b> . . . . .	82
3.6	Applications Numériques . . . . .	85
3.6.1	Conception d'un Circuit de Gauss . . . . .	87
3.6.2	Difficultés dues à la Méthode SIMP . . . . .	89
3.7	Formulation Polynomiale Généralisée des SIMs . . . . .	92
3.7.1	Proposition de SIMs Généralisés . . . . .	93
3.8	Etudes Comparatives avec les Formulations Généralisées . . . . .	94
3.8.1	Suites Affines du Premier Ordre . . . . .	94
3.8.2	Analyse des Profils de Performances . . . . .	95
3.8.3	Conception d'une Pièce Polaire pour PEH . . . . .	97
3.9	Conclusion . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Algorithme de B&amp;B pour l'Optimisation Topologique de PEHs</b> . . . . .	<b>101</b>
4.1	Introduction . . . . .	102
4.2	Méthodes Globales pour l'Optimisation Topologique . . . . .	102
4.3	Algorithme B&B par Intervalles . . . . .	103
4.3.1	Arithmétique d'Intervalles . . . . .	103
4.3.2	Fonction d'Inclusion . . . . .	105
4.4	Formulation du Problème d'Optimisation Topologique . . . . .	106
4.5	Algorithme B&B pour l'Optimisation Topologique . . . . .	108
4.5.1	Formulation Discrète du Problème ( <b><math>\Pi</math></b> ) . . . . .	108
4.5.2	Hypothèse et propriétés de la formulation ( <b><math>\Pi_\rho</math></b> ) pour le B&B . . . . .	108
4.5.3	Algorithme B&B pour l'Optimisation Topologique . . . . .	112
4.6	Design d'un Circuit Magnétique Élémentaire . . . . .	114
4.6.1	Résultats Numériques avec <b>ATOP<sup>TO</sup></b> et <b>ATOP<sup>BBA</sup></b> . . . . .	114
4.6.2	Etudes Détaillées d' <b>ATOP<sup>BBA</sup></b> . . . . .	117
4.6.3	Application du Programme <b>ATOP<sup>BBA</sup>→<sup>TO</sup></b> pour le Design Optimal d'un Circuit Magnétique . . . . .	118
4.7	Conclusion . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Minimisation de la densité de courant avec <b>ATOP<sup>TO</sup></b></b> . . . . .	<b>123</b>
5.1	Introduction . . . . .	124
5.2	Description du Problème . . . . .	124
5.2.1	Formulation du Problème . . . . .	125
5.2.2	Formulation M-SIMP du problème ( <b><math>\mathfrak{P}</math></b> ) . . . . .	127
5.3	Applications Numériques . . . . .	129
5.3.1	Cas Tests pour Différents Volumes de Matériau . . . . .	130
5.3.2	Analyse des Résultats Numériques . . . . .	130
5.4	Conclusion . . . . .	143

<b>Conclusion</b>	<b>145</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>

# Table des figures

1.1	Représentation générale du satellite Meteor : a) Meteor-18 avec 1- emplacement des propulseurs SPTs, 2- Réservoir de Xénon. b) Un moteur SPT-50. . . . .	13
1.2	a) Le satellite DS1 de la NASA en vol dans l'espace, la lumière bleu est le jet du fluide propulsif provenant de l'ionisation du Xénon. b) Le moteur ionique à grille avec 30 cm de diamètre pour un poids de 8.3 kg qui a servi de moyen de propulsion de DS1. (Crédit photo : NASA) . . . . .	14
1.3	a) Le satellite SMART-1 en vol, la traînée bleue claire montre le jet plasmique dû au fonctionnement du propulseur. b) La présentation du moteur à effet Hall PPS-1350 qui a été utilisé comme moyen de propulsion primaire de SMART-1. (Crédit photo : ESA) . . . . .	15
1.4	Les principaux éléments constitutifs d'un PEH : 1. Circuit magné- tique, 2. Bobines, 3. Anode, 4. Cathode, 5. Canal céramique, 6. Sup- port de fixation. . . . .	16
1.5	Schéma de la coupe transversale d'un PEH montrant son principe de fonctionnement. . . . .	18
1.6	Schéma de la coupe transversale d'un PEH avec des lignes de champ idéales présentant des lentilles magnétiques, schéma dans le plan (r, z) indiquant les différents éléments caractéristiques d'une topologie magnétique d'un PEH. . . . .	23
1.7	Coupe transversale d'un PEH montrant la topologie magnétique standard : a) Lignes de champ magnétique avec les lentilles ma- gnétiques et les valeurs extrêmes du champ en différentes parties du canal plasmique. b) ( <b>En haut</b> ) représentation des différentes zones d'une topologie magnétique : zone anode (1), zone d'ionisation (2), et zone d'accélération (3). ( <b>En bas</b> ) : Profils axiaux moyens (sché- mas) du champ électrique <b>E</b> , du taux d'ionisation ( <b>S</b> ) et de la densité des éléments neutres ( <b>N</b> ). . . . .	24
1.8	Schéma de la coupe transversale du circuit magnétique d'un propul- seur à effet à Hall. . . . .	25
1.9	Diagramme représentant notre démarche pour concevoir un circuit magnétique optimal pour Propulseur Electrique à effet Hall (PEH). . . . .	27

2.1	Représentation graphique d'une fonction présentant un minimum local $x_{OL}$ et un minimum global $x_{OG}$ . $\mathcal{V}^*$ est un voisinage de $x_{OL}$ sur lequel ce point est optimal global. . . . .	34
2.2	Optimisation de dimensionnement. Le design optimal comporte des membres dont certains ont été supprimés, ceux qui sont en pointillés : (à gauche) design initial, (à droite) design optimal. . . . .	36
2.3	Optimisation de forme géométrique. Les frontières en rouge sont celles qui sont variables : (à gauche) design initial, (à droite) design optimal. . . . .	36
2.4	Optimisation de forme Topologique : (à gauche) design initial avec une distribution quelconque et homogène de matériaux, (à droite) design optimal présentant deux parties distinctes, une zone blanche qui désigne le trou (ou vide) et une zone en noir pour les points matériels. . . . .	37
2.5	a) Domaine régulier dont celui de droite simplement continu et Lipschitzien, et celui de gauche de Classe 1 ; b) Domaine irrégulier présentant des singularités. . . . .	39
2.6	Passage d'une structure quasi axisymétrique à une structure réellement axisymétrique et la section 2D correspondante (à optimiser). . . . .	45
2.7	Un quart du moteur ionique, utilisé pour les simulations numériques 3D avec des sections transversales, dont une surface sera optimisée. . . . .	46
2.8	Représentation des vecteurs champs du champ $\mathbf{B}$ , $\mathbf{H}$ et $\mathbf{M}$ pour un milieu magnétisé uniformément par un aimant permanent. . . . .	49
2.9	Résolution méthodologique du problème inverse d'électromagnétisme pour la conception optimale de circuits magnétiques dédiées à la propulsion électriques, avec une approche d'optimisation topologique par la distribution optimale de matériaux. . . . .	52
2.10	Subdivision du domaine pour l'optimisation topologique. . . . .	53
2.11	(à gauche) la distribution de matériaux et de sources magnétiques pour le domaine primal où le potentiel vecteur $A$ est calculé ; (à droite) le domaine dédié au modèle adjoint obtenu, où le pseudo-potentiel vecteur $\lambda$ est calculé. . . . .	59
3.1	Optimisation topologique de treillis de barres (de type Michelle trusses). . . . .	63
3.2	Principe du concept du gradient topologique : le domaine initial $\Omega_v$ est perturbé par l'insertion de bulle de la forme $\mathbb{B}(x, \delta)$ . La nouvelle topologie $\Omega_{v,\delta}$ sera meilleure par rapport à la précédente selon le signe de la variation $\mathcal{F}(\Omega_{v,\delta}) - \mathcal{F}(\Omega_v)$ . Dans ce cas, l'élément géométrique de base $\Theta$ est un disque. . . . .	65
3.3	Le principe de l'approche par courbes de niveaux (dite level-set method) utilisant une fonction implicite $\psi$ paramétrant le domaine d'étude pour la conception optimale. . . . .	67
3.4	Le principe de la méthode d'homogénéisation : On obtient une structure moyennée (milieu effectif) à partir d'un mélange hétérogène multi-phase. . . . .	70

3.5	Milieu hétérogène $\varepsilon$ -périodique à deux phases. . . . .	72
3.6	SIM classique noté par $g_{c,n}(\rho) = \nu_r(\rho) = \nu_{\min} + (\nu_{\max} - \nu_{\min})\rho^n$ , avec $\nu_r$ la réductivité relative, $\nu_{\min} = 1/1000$ et $\nu_{\max} = 1$ . . . . .	76
3.7	Conception micro-structurale de matériaux composites obtenue par le mélange de vide (région en blanc) et de matériau solide isotrope linéaire (région en noir) avec un modèle SIMP de facteur de pénalisation $n = 4$ pour la formulation classique : le ratio de Poisson $\nu^0$ est choisi égal à 0 et 0,5 pour différentes valeurs de densité $\rho = \{0, 25; 0, 5; 0, 75\}$ . . . . .	77
3.8	Domaine topologique variable $\Omega_v$ discrétisé pour l'approche SIMP, chaque cellule est une variable de design tels que $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, \rho_N)$ , avec $N$ le nombre total de mailles. . . . .	79
3.9	Représentation graphique du domaine étudié $\Omega$ sous FEMM montrant le système de maillage utilisé pour la conception optimale avec <b>ATOP<sup>TO</sup></b> . . . . .	81
3.10	Diagramme de l'architecture de <b>ATOP<sup>TO</sup></b> . . . . .	86
3.11	Comparaison entre le schéma géométrique et les schémas classiques de degré $\{5, 6, 7\}$ , la perméabilité magnétique relative de valeurs $\mathbf{p}_{\max} = \mu_{fer} = 1000$ pour le fer et $\mathbf{p}_{\min} = \mu_{air} = 1$ pour l'air. . . . .	87
3.12	Domaine de conception pour le problème du circuit de Gauss : (a) la subdivision du domaine $\Omega$ , la discrétisation des zones variables $\Omega_{v1}$ et $\Omega_{v2}$ ( $\Omega_{v1} \cup \Omega_{v2} = \Omega_v$ ), et la zone de mesure $\Omega_T$ qui est au centre du domaine $\Omega$ . (b) Le graphe de la cartographie magnétique : sa composante $\mathbf{B}_0 y$ est une fonction gaussienne. . . . .	88
3.13	Résultats numériques pour le problème d'un circuit de Gauss. La quantité $f_{val}$ représente la valeur optimale du critère. Le facteur de pénalisation $n$ a été pris de 1 à 4. (cela correspond à $\mathbb{P}_n = [1, 2, 3, 4]$ . . . . .	90
3.14	Résultats numériques avec la formulation exponentielle : (a) historique de la convergence de la fonction objectif; (b) comparaison entre les composantes $y$ du champ imposé $\mathbf{B}_0$ et du champ calculé $\mathbf{B}$ ; (c) distribution spatiale de l'intensité du module $\ \mathbf{B}\ $ du champ magnétique dans le domaine $\Omega$ . . . . .	91
3.15	Les représentations graphiques des SIMs classiques $f_n^c$ et généralisés $f_n^u$ (SIM uniforme (3.43)) qui sont utilisés avec la méthode SIMP. Ces courbes sont tracées avec la reluctivité $\nu_r$ qui a pour valeurs min et max : $\nu_{r\min} = 10^{-3}$ et $\nu_{r\max} = 1$ . Le vecteur $\mathbb{P}_n$ égal à $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 10]$ . . . . .	94
3.16	Analyse des profils de performances, avec le code <b>ATOP<sup>TO</sup></b> utilisant les quatre SIMs sélectionnés : (a) Performance sur l'apparition des densités intermédiaires dans la solution optimale. Les segments en pointillés montrent les ratios de problèmes tests résolus pour $\tau = 12$ . (b) Performance pour la qualité de l'approximation du champ imposé dans $\Omega_T$ . Les segments en pointillés montrent les ratios de problèmes tests résolus pour $f_{opt} = 5 \cdot 10^{-5}$ . . . . .	97
3.17	Problème de conception d'une pièce polaire pour PEH. . . . .	98
3.18	Résultats numériques avec avec le SIM Classique. . . . .	99
3.19	Résultats numériques avec le SIM Uniforme. . . . .	99

3.20	Comparaison de la distribution des densités composites dans la solution continue. . . . .	99
4.1	Domaine de conception représentatif du problème d'optimisation topologique : la zone admissible est $\Omega_v$ où la topologie spatiale optimale en terme de matériau est à déterminer. . . . .	107
4.2	Principe de la programmation hybride $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{T0}}$ : un LSP (P) transformé en un SSP (P') qui est résolu avec $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$ . L'argmin de (P') est utilisé comme point de départ (P) résolu avec $\text{ATOP}^{\text{T0}}$ avec un algorithme d'optimisation locale. . . . .	115
4.3	Domaine de conception pour le design d'un circuit magnétique élémentaire : deux zones variables $\Omega_{v1}$ et $\Omega_{v2}$ . La densité de courant $\mathbf{J}_0 = (\mathbf{J}_{01}, \mathbf{J}_{02})$ caractérise la bobine (constituant la zone $\Omega_s$ , see Fig. 4.1). Le centre de la zone cible $\Omega_T$ occupe l'origine du repère associé au domaine d'étude $\Omega$ . . . . .	115
4.4	Les composantes du champ magnétique prescript $\mathbf{B}_0$ dans $\Omega_T$ . . . .	116
4.5	Deux problèmes SSP résolution globalement avec $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$ avec la borne inférieure $\text{LB}_2$ . (a) Premier cas test résolu avec 5 itérations en 1.19mn. (b) Second cas test résolu en 3477 itérations représentant approximativement 23h. . . . .	116
4.6	Deux solutions locales trouvées avec le code $\text{ATOP}^{\text{T0}}$ utilisant différents points de départ. . . . .	117
4.7	Application de l'approche heuristique hybride $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{T0}}$ . . . . .	120
4.8	La réalisation 3D du circuit optimale correspondant à la solution (en 2D) obtenue avec $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{T0}}$ . . . . .	120
5.1	Domaine de conception pour le problème de minimisation d'énergie. . . . .	125
5.2	Domaine de conception discrétisé pour l'approche M-SIMP. . . . .	127
5.3	Illustration graphique de l'inclinaison $\alpha$ et les régions d'analyse du profil du champ magnétique : la paroi interne (IW : Inner Wall), l'axe central (CL : Center Line) et la paroi externe (OW : Outer Wall) et le plan de sortie du canal plasmique. . . . .	131
5.4	Solution topologique optimale pour $\mathbf{T1}$ : $\text{Nb}_{\text{Iter}} = 0$ , $W(\rho^0) = 35,4$ et $\text{Nb}_{\text{Iter}} = 110$ ; $W(\rho^{\text{opt}}) = 0,48$ . . . . .	132
5.5	Distribution de l'intensité du module du flux magnétique dans le domaine de conception $\Omega$ (pour $\mathbf{T1}$ ). . . . .	132
5.6	Densités de courant optimales pour $\mathbf{T1}$ . . . . .	133
5.7	Contraintes imposées sur la topologie de la cartographie magnétique produite par le circuit optimal (pour $\mathbf{T1}$ ). . . . .	133
5.8	Le profil du champ à l'intérieur du moteur au niveau des deux parois murale et centrale du canal plasma : (a) le profil de la composante radiale du champ magnétique $\mathbf{B}$ ; (b) le profil de la composante axiale du champ magnétique $\mathbf{B}$ (pour $\mathbf{T1}$ ). . . . .	134
5.9	Analyse graphique de la distribution spatiale du champ magnétique $\mathbf{B}$ et du vecteur potentiel $A$ à l'intérieur du domaine de conception du circuit (pour $\mathbf{T1}$ ). . . . .	135



5.10	Solution topologique optimale pour <b>T2</b> : $\text{Nb}_{\text{Iter}} = 0$ , $W(\rho^0) = 2,38$ et $\text{Nb}_{\text{Iter}} = 138$ ; $W(\rho^{\text{opt}}) = 0,99$ . . . . .	136
5.11	Distribution de l'intensité du module du flux magnétique dans le domaine de conception $\Omega$ pour <b>T2</b> . . . . .	136
5.12	Densités de courant optimales pour <b>T2</b> . . . . .	137
5.13	Contraintes imposées sur la topologie de la cartographie magnétique produite par le circuit optimal (pour <b>T2</b> ). . . . .	137
5.14	Le profil du champ à l'intérieur du moteur au niveau des deux parois murale et centrale du canal plasma : (a) le profil de la composante radiale du champ magnétique <b>B</b> ; (b) le profil de la composante axiale du champ magnétique <b>B</b> (pour <b>T2</b> ). . . . .	138
5.15	Analyse graphique de la distribution spatiale du champ magnétique <b>B</b> et du vecteur potentiel $A$ à l'intérieur du domaine de conception du circuit (pour <b>T2</b> ). . . . .	139
5.16	Principe de jointure des blocs séparés du circuit optimal du cas test <b>T2</b> par optimisation de forme. . . . .	141
5.17	Réalisation pratique du design optimal du cas test <b>T2</b> : (a) Circuit magnétique optimal à jointure ferromagnétique; (b) Circuit magnétique optimal à jointure en matériau diélectrique léger (en bleu). Dans ces dispositifs : -la couleur grise désigne le circuit magnétique; -la couleur rouge désigne des zones de bobines externes $\Omega_{s3}$ et $\Omega_{s4}$ de valeur optimale de densité de courant $-0.61$ ; -la couleur marron désigné la zone de la bobine centrale $\Omega_{s1}$ de valeur optimale de densité courant $-0.25$ ; - la couleur jaune désigne la zone de la bobine arrière $\Omega_{s2}$ de valeur optimale $0.035$ , voir le Tableau 5.3.2. . . . .	142
5.18	Principe de jointure des blocs séparés du circuit optimal du cas test <b>T2</b> par optimisation de forme. . . . .	142



# Liste des tableaux

1.1	Ordres de grandeurs des incréments de vitesse $\Delta v$ correspondant à différents types de manœuvres dans l'espace. . . . .	7
1.2	Principales technologies de propulsion et comparaison de l'ordre de grandeur des paramètres caractéristiques. . . . .	11
1.3	Les valeurs moyennes des grandeurs caractéristiques de la mission interplanétaire tout électrique SMART-1 de l'agence spatiale européenne (ESA). . . . .	14
1.4	Les gaz rares avec leur masse atomique (m.a) et leur n.e (numéro électronique) : ce sont les éléments chimiques du groupe 18 dans la classification périodique de Mendeleïev. . . . .	18
3.1	Définition des propriétés des matériaux (y compris les sources) dans les différentes zones du domaine d'étude sous <b>FEMM</b> . Avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, la perméabilité absolue du vide (qui est la même que celle de l'air), la perméabilité magnétique et la densité de courant s'expriment en H/m et A/m <sup>2</sup> respectivement. . . . .	84
3.2	Les résultats numériques du problème de conception de la pièce avec <b>ATOP<sup>T0</sup></b> suivant les quatre SIMs proposés. . . . .	98
4.1	Analyse des solutions obtenues avec <b>ATOP<sup>BBA</sup></b> et <b>ATOP<sup>T0</sup></b> le problème test 2. . . . .	118
4.2	Etudes comparatives entre bornes inférieures <b>LB<sub>1</sub></b> et <b>LB<sub>2</sub></b> . . . . .	119
5.1	Les résultats numériques avec <b>ATOP<sup>T0</sup></b> du problème de conception des pièces polaires interne et externe, pour une consommation minimale de puissance électrique. Les temps CPU sont de 130 min pour <b>T1</b> et 290 min pour <b>T2</b> . . . . .	141



# Liste des algorithmes

1	Optimisation et Pénalisation des Densités Intermédiaires . . . . .	86
2	$ATOP^{BBA}$ . . . . .	113
3	$ATOP^{BBA \rightarrow TO}$ . . . . .	114



# Introduction

La conquête spatiale offre des sujets passionnants et fondamentaux à la communauté scientifique. Afin d'explorer l'espace, il faut cependant disposer de technologies adéquates. En effet, pour échapper à l'attraction terrestre et fendre les couches atmosphériques qui enveloppent notre planète, des dispositifs requérant une énorme source d'énergie (presque illimitée) sont nécessaires. Ainsi, au commencement était la propulsion chimique. Avec cette technologie les chercheurs et ingénieurs ont pu élaborer des engins spatiaux qui ont permis de faire les premiers pas dans l'espace. Ces moteurs à propulsion chimique fournissent une très grande puissance et ils sont aussi très gourmands en terme de consommation de carburant. L'une des conséquences de l'utilisation d'une quantité importante d'ergols par les moteurs chimiques, est qu'il n'y a quasiment pas de place pour embarquer suffisamment de *charges utiles* (c'est-à-dire par exemple les matériels scientifiques pour l'échantillonnage, les doublons des composantes sensibles en cas de défaillance, etc). S'ils constituent encore la seule alternative pour faire décoller les fusées, ils ne peuvent en aucun cas constituer une solution viable lorsqu'il s'agit d'effectuer des missions interplanétaires avec des sondes spatiales et dans ce cas, la seule alternative réside dans la propulsion électrique (qui est plus habilitée ces missions longues durées).

Les moteurs à propulsion électrique sont des moteurs *plasmiques* ou *ioniques* qui présentent plusieurs avantages, dont le principal est qu'ils sont économes en carburant. De plus, les satellites se déplaçant à l'aide de ce type de moteur électrique peuvent embarquer plus de charges utiles. De surcroît, grâce aux technologies de la propulsion électrique, les voyages dans les espaces lointains deviennent possibles. Ainsi, les voyages interplanétaires pourront se faire à l'aide des moyens de transport « low-cost » comparativement au coût astronomique alloué aux lancements des satellites à propulsion chimique. De nos jours, ces moteurs à propulsion électrique et plus particulièrement le moteur à effet Hall sont utilisés sur beaucoup de satellites, notamment les satellites géo-stationnaires employés pour la télécommunication, les analyses météorologiques, les surveillances des trafics aériens, etc. Malgré des avancées technologiques significatives, le design de ces moteurs plasma reste problématique du fait de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu. Chacun des trois constituants principaux du moteur à effet Hall par exemple soit la cathode, le canal plasma et le circuit magnétique peuvent faire l'objet d'études fondamentales afin d'avoir une vision rigoureuse et globale du dimensionnement du système.

Jusqu'à présent la conception du Propulseur à Effet Hall (PEH) se faisait em-

piriquement (par « essai-erreur »). Dans cette thèse, l'objectif est de proposer des modèles mathématiques pour aider le concepteur dans sa tâche de réalisation du circuit magnétique du propulseur électrique. En effet, on pourra tenter de proposer une solution alternative aux approches habituelles par essai-erreur qui sont à la fois coûteuses (en terme de matériels utilisés pour les expérimentations), pénibles (car ces instruments de mesures ne sont pas à la portée de tous), et moins rationnelles.

La conception du circuit magnétique d'un propulseur peut être considéré comme un problème inverse d'électromagnétisme. En effet, à partir d'une topologie magnétique requise dans le canal plasma, il faudra déterminer la distribution des matériaux et des sources du champ magnétique, l'inter-connection des différentes composantes est alors une inconnue du problème de conception.

Par la suite, dans cette thèse, on se propose de formuler ce problème inverse sous la forme d'un problème d'optimisation mathématique. Les modèles théoriques, ainsi obtenus sont des problèmes d'optimisation non-convexes avec des contraintes comportant des équations aux dérivées partielles (EDPs). En effet, les phénomènes électromagnétiques qui régissent le fonctionnement de ces moteurs plasmiques font intervenir le champ électromagnétique et les équations de Maxwell. Ces problèmes d'optimisation sont difficiles à résoudre car ils sont mal-posés au sens de Hadamard.

Pour trouver des solutions à ces problèmes de conception par optimisation, nous proposons l'utilisation des méthodes d'optimisation topologique. L'optimisation topologique appartient à la famille des méthodes d'optimisation structurale qui furent initialement développées pour résoudre les problèmes purement mécaniques. Notre motivation dans l'utilisation de cette méthode vient du fait qu'elle doit permettre de générer des circuits magnétiques à géométries variées se distinguant ainsi des procédés habituels de conception qui consistent à faire bouger les contours d'une pièce ferromagnétique (préalablement et soigneusement choisie) sans modifier véritablement la topologie de la pièce. Les outils d'optimisation topologique offrent quant à eux des changements fondamentaux de la structure à concevoir sans aucun a priori sur la connectivité du domaine de conception.

A partir d'un premier modèle (théorique) d'optimisation topologique pour la conception des circuits magnétiques pour propulseurs électriques, nous avons développé une deuxième formulation basée sur la discrétisation du domaine d'étude à optimiser (y compris des méthodes par éléments finis pour la résolution des EDPs) du problème initial. C'est ce nouveau modèle discret qui sera assujéti aux simulations numériques. Pour cela avec l'optimisation topologique, il existe plusieurs techniques dans la littérature. Mais dans ces travaux, nous avons privilégié une technique basée sur la distribution optimale de densité de matériau dans un domaine de conception à topologie variable. Cette approche qui est une variante de la méthode par homogénéisation, est plus couramment connue sous le nom de modèle SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization of intermediate densities). Elle consiste à relaxer le problème initialement discret (ou mixte) en un problème d'optimisation continu suivi d'une pénalisation des valeurs optimales continues afin d'obtenir la convergence vers des solutions discrètes (pour les variables qui



doivent-être discrètes). Par ailleurs, cette approche SIMP est la plus utilisée, et on la retrouve même dans des logiciels commerciaux de conception optimale.

Sur le problème continu par relaxation, on a l'avantage d'utiliser des algorithmes d'optimisation locale de type gradient (c'est-à-dire utilisant une direction de descente). En général, ses algorithmes sont efficaces sur des problèmes de grande taille contrairement aux algorithmes combinatoires. Par conséquent, une information du premier ordre est plus que nécessaire pour la procédure d'optimisation numérique. Dans notre cas, nous calculons le gradient topologique matériel appelé aussi sensibilité de la fonction coût à travers une méthode de variable adjointe. L'utilisation de cette dérivée analytique rend notre module d'optimisation beaucoup plus robuste et rapide que si l'on devait par exemple utiliser les différences finies.

Après avoir envisagé une méthode d'optimisation topologique qui permet d'obtenir des solutions locales, nous avons poussé notre investigation sur des algorithmes déterministes d'optimisation globale et ce, malgré la difficulté de prouver l'existence d'un optimum global. Nous présenterons dans ce contexte des techniques d'optimisation topologique hybrides faisant intervenir une étape de résolution par un algorithme d'optimisation déterministe globale de type B&B (Branch and Bound), associé à un algorithme d'optimisation local (si nécessaire). Avec le B&B, nous pourrions fournir des bornes analytiques du critère d'optimisation en utilisant des méthodes de calculs basées sur l'Arithmétique des Intervalles (AI) et une hypothèse sur la norme du champ magnétique dans la zone objectif.

La transposition des méthodes d'optimisation topologique dédiées à la résolution des problèmes mécaniques (notamment la minimisation de la compliance) à la résolution des problèmes de conception des dispositifs électromagnétiques n'est pas simple. En effet, on n'a pas les mêmes considérations en terme de propriété de matériau ni les mêmes modèles physiques. Donc, l'utilisation de telles approches dans le domaine de l'électromagnétisme, en particulier pour la conception des circuit magnétiques reste difficile. Au cours de ces travaux, nous relèverons ce défi en proposant des programmes **ATOP** (Algorithm To Optimize Propulsion) d'optimisation topologique capable de résoudre efficacement les problèmes inverses d'électromagnétisme. L'application de ces méthodes se fera sur le design de circuits élémentaires pour propulseur à effet Hall.

Ce mémoire de thèse est scindé en 5 chapitres. Dans ce qui suit, des résumés de chacun de ces chapitres seront donnés.

Dans le premier chapitre, nous présenterons les principales technologies de la propulsion spatiale. Nous montrerons les grandes réussites du domaine de la propulsion spatiale et nous terminerons ce chapitre en discutant les difficultés liées à la conception des propulseurs et la nécessité de développer des outils afin d'automatiser ces processus de design.

Dans le second chapitre, des approches mathématiques d'optimisation structurale existantes seront présentées pour la résolution de problèmes physiques. Dans ce

chapitre, nous analyserons notre problème de conception dans le but de le formuler comme un problème d'optimisation topologique.

Dans le chapitre trois, nous détaillerons successivement les étapes du calcul de la sensibilité de notre problème d'optimisation et l'utilisation du modèle SIMP pour le design des circuits magnétiques. Dans ce chapitre, nous exposerons aussi en détails à la fois le principe de fonctionnement de notre code  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  et l'importance de l'utilisation de notre schéma généralisé d'interpolation de matériaux à travers des études comparatives (avec le schéma classique existant). Ce chapitre comportera également des exemples d'applications de design de circuits magnétiques qui valideront notre approche.

Suite à l'application d'algorithmes d'optimisation locale, des premières solutions topologiques ont été obtenues, mais la dépendance du point départ est très forte. Afin de palier à cela, dans le chapitre quatre, nous avons mis en place une technique d'hybridation s'appuyant sur l'utilisation d'un point de départ obtenu globalement avec un algorithme de type B&B. Ce chapitre contient une section d'application numérique validant notre méthode de couplage d'algorithme d'optimisation globale et locale. Les bons résultats des techniques développées dans ce chapitre ont permis d'élaborer une nouvelle version du code initial  $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{T0}}$ .

Le chapitre cinq est quant à lui dédié aux résultats numériques avec  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$ . Cependant, nous exploiterons un nouveau critère d'optimisation basé sur la minimisation de l'énergie générée au sein du circuit magnétique. Dans ce chapitre, on montre à quel point nos approches de conception optimale sont capables de trouver des solutions réalisables en terme de fabrication concrète sur des problèmes assez variés.

Enfin dans la conclusion, un résumé des travaux effectués dans cette thèse est proposé. De plus, on se tourne pour finir vers l'avenir en proposant quelques possibilités d'extensions complémentaires à ces résultats.

# Chapitre 1

## Propulsion Spatiale Électrique et Problématique de la Conception Optimale des Propulseurs à Effet Hall

## 1.1 Introduction

Ce premier chapitre doit permettre de se familiariser avec le domaine d'application associé au sujet d'étude que nous allons traiter dans cette thèse, à savoir la propulsion électrique spatiale. Il est en effet nécessaire avant de se plonger dans la méthodologie d'optimisation qui fera l'objet de la thèse de tracer rapidement le contour physique sur lequel s'appuie les outils mathématiques mis en place. La propulsion électrique spatiale sera donc ici présentée dans ses grandes généralités, en partant dans un premier temps des technologies opérationnelles jusqu'aux caractéristiques physiques de leurs performances. Après avoir fait le tour rapidement des propulseurs électriques développés depuis les années 1970, on se focalisera dans un second temps sur le Propulseur à Effet Hall (PEH) qui a déjà connu quelques beaux succès spatiaux (Deep Space 1, Smart 1). Son principe de fonctionnement sera détaillé. Au travers d'une analyse des trois constituants physiques fondamentaux de son circuit (la cathode, le canal plasma et la topologie magnétique générée dans le canal plasma), on pourra mettre en lumière la complexité physique et les différentes problématiques associées à l'optimisation de la configuration magnétique d'un propulseur plasmique. Fort de ce constat, nous choisirons de nous consacrer à un axe de recherche visant à optimiser le circuit magnétique générant une topologie spécifique de champ magnétique dans le canal plasma.

## 1.2 Propulsion Spatiale

Outre des problèmes de conception, les systèmes de propulsion des satellites ont besoin d'une consommation d'énergie assez importante fournie par le carburant et le système électrique et électronique embarqué. Le type de carburant utilisé et l'ensemble des processus de sa transformation en force propulsive motrice sont d'autant plus importants qu'ils permettent entre autres à l'analyse de la performance, l'efficacité et aussi à la classification des propulsions spatiales.

Ainsi, en faisant, l'inventaire des forces appliquées au satellite voguant dans son orbite, la conservation de la quantité de mouvement conduit à une relation liant la masse de carburant consommée  $m_c$  à la variation  $\Delta v$  de la vitesse du système et de la vitesse d'éjection  $v_p$  du fluide propulsif ; ceci est défini comme suit :

$$m_c = m_0(1 - e^{-\frac{\Delta v}{v_p}}) \quad (1.1)$$

où  $m_0$  est la masse du satellite (y compris le carburant). L'équation (1.1) est aussi appelée équation de Tsiolkovski<sup>1</sup> (ou de la fusée). Elle permet de constater par exemple que pour effectuer une manœuvre nécessitant une accélération  $\Delta v(>0)$ , celle-ci peut être accomplie avec une faible consommation de carburant en augmentant  $v_p$  (voir (1.1)).

---

1. Constantin Edouardovitch Tsiolkovski (5 Septembre 1857 -19 Septembre 1935) est un scientifique Russe d'origine Polonaise considéré comme le père et le théoricien de l'astronautique moderne. Dans la littérature, on trouve aussi le nom « Tsiolkovsky » désignant la même personne.

Manœuvres	$\Delta v$ [m.s <sup>-1</sup> ]
Transfert d'orbite	1500
Mise à poste	8
Correction d'orbite	15 (par an)
Contrôle Nord/Sud	50 (par an)
Contrôle Est/Ouest	5 (par an)
Désorbitation	3
Propulsion primaire (sonde)	400

TABLE 1.1 – Ordres de grandeurs des incréments de vitesse  $\Delta v$  correspondant à différents types de manœuvres dans l'espace.

### 1.2.1 Différents Types de Missions Spatiales

La propulsion spatiale se divise principalement en deux types de missions :

- les opérations de transfert d'orbite et les missions interplanétaires qui font appel à des systèmes dit de propulsion primaire,
- les opérations mettant en œuvre des systèmes de propulsion secondaire et principalement liées aux déplacement des satellites :
  - avec le transfert d'orbite basse,
  - avec la mise à poste du satellite,
  - avec les corrections d'orbites,
  - avec l'orientation du satellite (correction Nord/Sud et Est/Ouest),
  - et en fin de vie la mise sur l'orbite de rebut.

Le Tableau 1.1 donne des ordres de grandeurs de l'incrément de vitesse pour les manœuvres usuelles d'un satellite géostationnaire, et pour la propulsion primaire d'une sonde [2].

### 1.2.2 Grandeurs Caractéristiques : Poussée et Impulsion Spécifique

Les principales grandeurs caractéristique permettant des études analytiques et comparatives rationnelles des propulseurs sont :

- **la poussée**  $T$ , elle est la force motrice induite par l'expulsion des gaz propulsifs (avec une vitesse  $v_p$ ), orientée dans le sens opposé de  $v_p$ . Elle est donnée localement à chaque instant par :

$$T = v_p \frac{dm}{dt} = v_p \dot{m} \quad (1.2)$$

avec  $\dot{m}$  est le débit massique du gaz éjecté. De cette expression, on en déduit que l'intensité de la poussée est d'autant plus grande que la quantité de carburant consommé à la seconde est élevée.

- **l'Impulsion Spécifique**  $I_{sp}$ , notée en général par  $I_{sp}$ . Cette quantité est fréquemment employée pour caractériser les performances d'un propulseur. Elle permet en effet de compléter l'information apportée par la valeur de la poussée  $T$ , en lui associant une notion de consommation. L'impulsion spécifique  $I_{sp}$ , exprimée en secondes correspond au temps nécessaire à une force pour produire une poussée équivalente à celle consécutive à l'éjection d'une masse  $m_p$  (ou encore au temps pendant lequel un propulseur pourra maintenir une poussée de  $g$  Newton avec 1kg de fluide propulsif, où  $g$  est la constante d'accélération du pesanteur dont une valeur approximative est  $9,8 \text{ N.kg}^{-1}$  son S.I est  $\text{m.s}^{-2}$ ). L'impulsion spécifique est définie par :

$$I_{sp} = \frac{T}{m_p g} = \frac{v_p}{g} \quad (1.3)$$

L' $I_{sp}$  étant du même sens de variation (au sens Mathématique) que  $v_p$ , il s'ensuit de la relation (1.1), que plus  $I_{sp}$  est grande, plus la consommation est faible (pour opérer un incrément de vitesse donnée).

Ces grandeurs caractéristiques conduisent à la classification des propulseurs pour les véhicules spatiaux en deux grandes technologies à savoir la propulsion chimique et la propulsion électrique.

### 1.2.3 Propulsion Chimique

La technologie de la propulsion chimique est la plus ancienne et la mieux maîtrisée. Elle consiste à réaliser une poussée en éjectant sous haute pression une grande quantité de gaz provenant de la combustion de produits chimiques. Dans le domaine de la propulsion chimique, il existe les systèmes de :

- **Propulsion à gaz froids** : Ces systèmes de propulsion utilisent des gaz légers tels que l'hydrogène, l'hélium et l'azote contenus dans un réservoir sous forte pression. Ceux-ci sont simplement libérés dans une tuyère d'éjection détenteur-régulateur de pression. Ce type de propulsion est destiné soit à la correction d'orientation ou de vitesse soit au contrôle d'altitude d'un satellite ou d'une sonde spatiale.
- **Propulsion liquide** : Dans le système des propulseurs à ergols liquides, on exploite une réaction exothermique entre un comburant et un combustible qui sont aspirés par une turbo-pompe avant d'être injectés dans la chambre de combustion. C'est le type de propulsion utilisé par tous les lanceurs. Le gaz produit est propulsé à travers une tuyère.
- **Propulsion Solide** : Dans un moteur à propulsion solide, on dispose d'un seul réservoir contenant le propergol solide, mélange de comburant et de combustible appelé chargement. Ce chargement est percé par un tuyau métallique qui sert de chambre à combustion. L'éjection des gaz provenant de la combustion chimique crée la poussée. Ce type de propulsion est majoritairement utilisé pour les missiles et comme propulseur d'appoint du premier étage dans les fusées modernes.

### 1.2.4 Propulsion Electrique

La propulsion électrique est basée sur l'utilisation de l'énergie électrique, fournie en général par des panneaux solaires intégrés au satellite. On peut définir la propulsion électrique comme étant la poussée produite par l'accélération d'un fluide propulsif. De cette définition, on peut distinguer principalement 3 types (ou moyens) de propulsion électrique [4] :

- **la propulsion électrothermique**, les propulseurs électrothermiques emploient un arc électrique (Arcjet) ou un chauffage par effet Joule (Résistorjet) pour chauffer le gaz propulsif éjecté à grande vitesse par une tuyère.
- **la propulsion électrostatique**, consiste à accélérer un gaz ionisé via un champ électrique.
- **la propulsion électromagnétiques** met conjointement en jeu un champ électrique et un champ magnétique. Il s'agit de créer des collisions entre les électrons et les atomes d'un gaz afin de générer le plasma à partir d'un gaz ionisé. Les ions sont accélérés en sortie du canal plasma par un fort gradient de champ magnétique. Ces moteurs sont appelés moteurs plasmas ou moteurs à effet Hall<sup>2</sup> ou plus couramment Propulseur à Effet Hall, que l'on notera PEH.

Actuellement la propulsion électrostatique et électromagnétique sont les technologies les plus matures. Cependant, dans mes travaux de thèse, on s'intéressera plus particulièrement à la conception des PEHs.

L'exploitation des propulseurs électriques met en avant une caractéristique supplémentaire en parallèle de la poussée  $T$  et de l'impulsion spécifique  $I_{sp}$  qui se nomme l'efficacité et qui est notée  $\eta$ . Elle correspond au rapport de la puissance mécanique  $P_{meca}$  convertie en énergie cinétique pour le satellite sur la puissance électrique absorbée par le propulseur  $P_{el}$ . Ainsi, ce paramètre  $\eta$  qui est très important pour l'analyse des missions spatiales est donné par :

$$\eta = \frac{P_{meca}}{P_{el}} = \frac{T^2}{2m_p P_{el}}. \quad (1.4)$$

Dans ce cas, une relation entre la poussée  $T$ , la puissance électrique  $P_{el}$  et la vitesse d'éjection  $v_p$  est obtenue comme suit :

$$\frac{T}{P_{el}} = \frac{2\eta}{v_p}. \quad (1.5)$$

Ce rapport diminue lorsque la vitesse d'éjection augmente pour une même poussée. On déduit alors de (1.3) qu'un propulseur à forte  $I_{sp}$  consommera donc une puissance électrique plus élevée qu'un propulseur à  $I_{sp}$  faible [2].

## 1.3 Intérêt pour la Propulsion Electrique

La propulsion classique chimique génère des poussées considérables, pouvant atteindre des milliers de Newtons. Cet avantage apparent est en fait à double

---

2. Edwin Herbert Hall (7 Novembre 1855 - 20 Novembre 1938) est un physicien Américain qui a découvert l'effet Hall en 1879.

tranchant. En effet :

- Pour échapper à l'attraction terrestre, il faut fournir une puissance de poussée énorme et seule la propulsion chimique est capable d'assurer cette fonction d'extraction.
- Cette forte poussée consomme une masse de carburant à l'image de la puissance fournie. Par exemple, dans le cas de TELECOM 2, satellite géostationnaire de télécommunication, d'une masse totale au lancement de 2,3 tonnes et d'une durée de vie de 10 ans, la masse du système propulsif est de 1,250 tonnes, dont 1,150 tonnes d'ergols liquides. Pour un satellite d'observation de la terre en orbite basse tel que SPOT 1, 2 ou 3<sup>3</sup> de masse au lancement 1,9 tonnes et d'une durée de vie de 3 ans, la masse du système propulsif est de 200 kg dont 150 kg d'ergols [3].

La masse d'un satellite 100% chimique est composée pour environ 60% du poids des ergols, des réservoirs, de la tuyauterie, des vannes et des pompes. Cette consommation élevée mise en parallèle avec le prix du kilogramme embarqué (entre 10 et 20 k€) rend la propulsion chimique inexploitable pour les vols ou les manœuvres spatiaux de longue durée. De plus, une fois le satellite dans l'espace propre c'est à dire sur son orbite, la vitesse d'éjection des masses du gaz propulsif  $v_p$  est faible ce qui implique aussi une faible valeur de l' $I_{sp}$ .

Au vu de ces difficultés, l'alternative qui séduit à la fois les scientifiques et les industriels est la propulsion électrique. Avec les propulseurs électriques, la vitesse d'éjection communiquée au gaz ionisé peut atteindre plusieurs dizaines de km/s d'où une grande valeur de l' $I_{sp}$ . Les moteurs électriques ont une faible consommation de carburant, ce qui les rend très attractifs voire indispensables pour les missions de longue durée (notamment les missions interplanétaires).

Cependant, les propulseurs électriques ne sont pas sans inconvénient. Leur principal défaut est la faible poussée générée, seulement de quelques dizaines ou centaines de milliNewton. Par exemple le moteur à effet Hall de l'Aérojet BPT-4000 fournit environ 0,262 N pour une puissance de 4500 W et une tension électrique de 400 V (les valeurs correspondantes pour  $I_{sp}$  et  $\eta$  sont respectivement de 2059 s et de 59%). A noter que des tests réalisés avec succès sur ce PEH ont permis de conclure qu'il est le moteur électrique le plus puissant pour les vols commerciaux [5, 6]. Cette puissance minime ne permet pas de faire décoller des lanceurs ou de mettre des engins en orbite, mais la capacité de travailler sur de longues périodes permet :

- *d'accélérer en permanence un véhicule spatial* : sur des distances à parcourir très longues, comme des vols interplanétaires, la sonde équipée d'un propulseur électrique aura au final une vitesse supérieure à ce qu'elle aurait pu avoir avec une impulsion chimique initiale ;
- *de réaliser des corrections en permanence de trajectoire ou d'orbite* : les corrections sur les orbites de satellites se font habituellement à des instants précis par allumage des moteurs chimiques pour réaliser une correction suffi-

---

3. SPOT est l'acronyme de Satellite Pour l'Observation de la Terre. Le programme SPOT est réalisé par le CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) et ses collaborateurs. SPOT-1 a été lancé le 22 Février 1986 par Ariane 1.



Technologie		$T[N]$	$I_{sp}[s]$	Manœuvre de Transfert	Contrôle d' Altitude	Contrôle d'Orbite
Chimique	Gaz froid	0,05-20	10-170		×	
	Liquide	1-2000	250-350	×	×	×
	solide	50-50000	280-310	×		
Electrique	Electrothermique	0,1-0,2	450-650	×	×	×
	Electrostatique	0,001-0,02	2300-3500		×	×
	Electromagnétique	0,01-0,5	1000-2500	×	×	×

TABLE 1.2 – Principales technologies de propulsion et comparaison de l'ordre de grandeur des paramètres caractéristiques.

samment importante pour justifier cet allumage coûteux. Avec des moteurs électriques, le faible coût permet de réaliser cette correction plus souvent, sur des amplitudes moins importantes [7].

La faible poussée inhérente aux propulseurs électriques rend ces propulseurs « *marathoniens* ». En effet, un satellite tout électrique aura un délai de mise à poste très long. Un satellite à propulsion électrique mettra par exemple 6 à 7 mois pour se placer dans l'orbite géostationnaire contre une dizaine de jours pour une propulsion chimique. Si une mission Apolo pouvait se placer sur l'orbite lunaire en 3 à 4 jours, la sonde SMART-1 a mis environ 14 mois [8].

L'utilisation des moteurs tout électrique reste problématique pour des missions où la durée est une contrainte. Pour améliorer la poussée, il est nécessaire d'apporter d'avantage de puissance électrique au dispositif, mais l'énergie est une denrée rare dans l'espace (à moins d'être suffisamment proche du soleil ce qui n'est pas sans danger pour le véhicule spatial).

Malgré ces bémols, la propulsion électrique reste la plus avantageuse pour la plupart des opérations spatiales car à poussée donnée, elle permet de réduire de plus de 60% la masse de carburant et le coût de la mission comparativement au cas chimique. On peut dans ce cas transporter plus de charge utile sur les satellites. Les grands industriels du spatial tels que SAFRAN, SNECMA et BOEING prévoient dans les années à venir, l'envoi de nombreux satellites « tout électrique ». Notamment des satellites dédiés à la télécommunication et des voyages dans les espaces lointains (C'est le cas par exemple de AlphaSat, lancé en 2013).

Le Tableau 1.2 résume les différentes technologies de propulsion, leurs champs d'application pour les missions spatiales et leurs principales performances (la poussée  $T$  et Impulsion Spécifique  $I_{sp}$  voir les équations (1.2) et (1.3)). Toutefois, ces valeurs peuvent varier en fonction de la taille du moteur et de la puissance élec-

trique d'alimentation (surtout au niveau des propulseurs électriques).

### 1.3.1 Maturité des Propulseurs Electriques

Suite aux études de Tsiolkovsky qui a notamment travaillé sur la propulsion chimique, le concept de propulsion électrique fut introduit par Robert H. Goddard en 1906. Il déposa le premier brevet d'un propulseur électrostatique en 1920 [2, 4]. Par la suite, il faut attendre 1980 et le début de la conquête spatiale pour que la propulsion électrique fasse véritablement son apparition. Citons à ce titre les avancées majeures avec les travaux de A. V. Cleaver [9] et de D. G. Sheperd [10] dans les années 80 et le développement des premiers propulseurs opérationnels grâce aux travaux de E. Stuhlinger<sup>4</sup> [11, 12, 13, 14]. La concurrence technologique entre les Etats Unis d'Amérique (USA) et l'URSS dans les années 60-70 constituera aussi un facteur majeur pour le développement des différentes technologies des propulseurs électriques (SERT I : Space Electric Rocket Test pour les USA ; et ZOND : Зонд (sonde) et METEOR : Meteor (météorologie) pour l'URSS).

Aujourd'hui, les moteurs tout électrique sont matures et ont été utilisés avec succès pour réaliser des missions réelles hors laboratoire. Parmi les nombreux vols dans les domaines spatiaux lointains, citons les plus célèbres avec METEOR 1, DEEP SPACE 1 et SMART 1, dont on va expliciter le moteur de propulsion dans les prochains paragraphes.

#### 1.3.1.1 Satellite Meteor et les Propulseurs SPTs

Les concepts de moteurs commercialisés sont les propulseurs Russes SPTs (Stationary Plasma Thrusters), les propulseurs NSTAR (NASA Solar Technology Application Readiness) des Américains, et le PPS-1350 (Propulseur Plasma Stationnaire) du groupe Français SAFRAN. Les moteurs SPTs appartiennent à la famille des propulseurs électromagnétiques (voir la section 1.2.4). Ces engins ont été développés par le chercheur et ingénieur Russe A. I. Morozov et les membres de son équipe. Ils ont équipé la famille des satellites Meteor dédiés à la récolte de données météorologiques. C'est ainsi que le 29 Décembre 1971, le premier satellite Meteor-18 muni de deux propulseurs SPT-50 a été mis en orbite. Les tests effectués sur ce vaisseau spatial au cours de son fonctionnement en 1972 ont été concluants, la poussée obtenue par l'analyse des données du satellite sur les paramètres de la correction d'orbite étant conformes à celles obtenues pendant les tests et les simulations effectués en laboratoire. De plus, les deux prototypes ont pu fonctionner et assurer un transfert d'orbite d'une hauteur de 17 km avec une poussée de 20 mN pendant 170 heures. Ces prototypes avaient une efficacité comprise entre 0,15 et 0,45. La réussite de cette mission est due en grande partie au Professeur A. I. Morozov [16, 17, 18, 19]. Une illustration de Meteor-18 et d'un moteur SPT-50 est donnée sur la Figure 1.1.

---

4. Ernst Stuhlinger (19 Décembre 1913 - 25 Mai 2008) était un scientifique Américain (d'origine Allemande). Ses travaux ont énormément contribué au développement des moteurs ioniques pour la propulsion spatiale électrique.

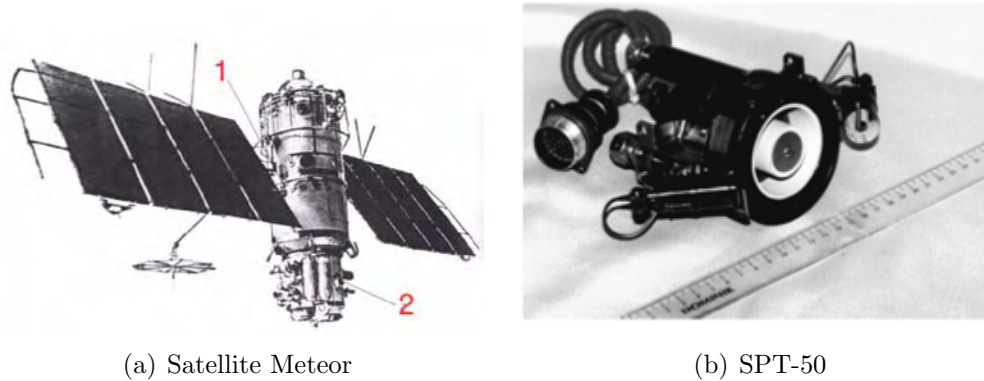


FIGURE 1.1 – Représentation générale du satellite Meteor : a) Meteor-18 avec 1- emplacement des propulseurs SPTs, 2- Réservoir de Xénon. b) Un moteur SPT-50.

### 1.3.1.2 Deep Space 1 (DS1) et le moteur NSTAR

La sonde spatiale DS1 a servi pour la première mission interplanétaire. Elle intègre un engin à grille de propulsion ionique, issue de la NASA (National Aeronautics and Space Administration). Son moteur est un produit du programme NSTAR (NASA Solar Technology Application Readiness) développé et conçu par les chercheurs et ingénieurs de l'équipe NASA GRC, JPL et Hughes/Boeing. Elle a été lancée le 24 Octobre 1998 et termina sa mission le 18 Décembre 2001. L'expédition fut un grand succès et permit de valider les performances de la propulsion électrique en particulier celle des moteurs de la série NSTAR pour les missions dans les espaces lointains. Ce moteur propulsa le véhicule spatial sur environ 263.179.600 km avec un incrément de vitesse  $\Delta v$  à plus de 4,3 km/s. Pour cette opération la masse de Xénon consommée (environ 82 kg) a permis au moteur NSTAR de fournir des poussées comprises entre 19 mN et 92 mN pour des puissances électriques de 0.5 à 2.3 kW. L' $I_{sp}$  correspondante fut de 1900 à 3100s (plus de dix fois supérieure à celle d'un moteur chimique conventionnel) pour plus de 16000 heures de fonctionnement où son efficacité  $\eta$  a varié entre 0,42 et 0,62. Le voyage de DS1 fut le plus suivi de l'histoire et le plus productif en publications scientifiques [20]. La Figure 1.2 montre DS1 et son propulseur ionique.

### 1.3.1.3 SMART-1 et le PPS-1350

L'agence spatiale européenne ESA (European Space Agency) créée en Mai 1975 (comparativement à la NASA : Juillet 1958) a envoyé sa première sonde lunaire 100% électrique SMART-1 (Small Mission for Advanced Research in Technology) le 27 Septembre 2003. SMART-1 était équipé d'un propulseur plasmique à effet Hall appelé PPS-1350 conçu par le constructeur Français SNECMA du groupe SAFRAN. Ce propulseur électrique est l'équivalent du SPT-100 du constructeur Russe Fakel. Mis en orbite géostationnaire par le lanceur Ariane-5, le satellite a atteint son orbite lunaire en Novembre 2004 pour accomplir ses missions scientifiques. Grâce à son moteur à plasma délivrant 68 mN de poussée avec une  $I_{sp}$  de 1640 s pour une puissance maximale de 1,19 kW fournie par les deux panneaux

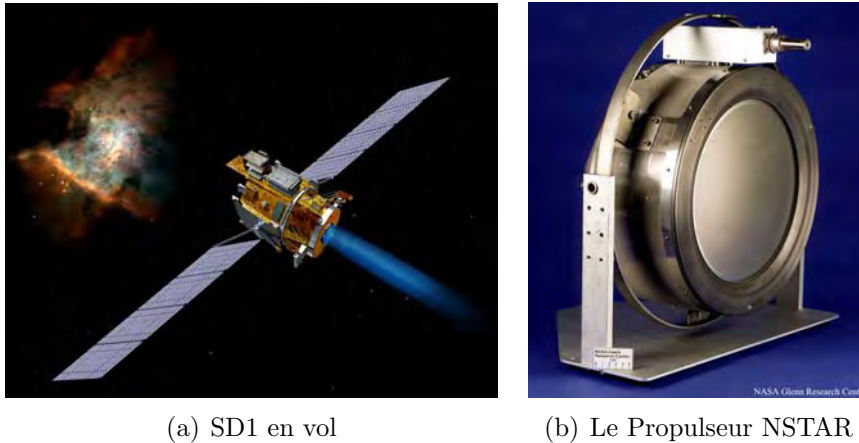


FIGURE 1.2 – a) Le satellite DS1 de la NASA en vol dans l’espace, la lumière bleu est le jet du fluide propulsif provenant de l’ionisation du Xénon. b) Le moteur ionique à grille avec 30 cm de diamètre pour un poids de 8.3 kg qui a servi de moyen de propulsion de DS1. (Crédit photo : NASA)

solaires intégrés à son plateforme. SMART-1 a parcouru plus de  $100 \times 10^6$  km en consommant seulement 82 kg de Xénon. Le PPS-1350 a pu produire des poussées pendant une durée cumulée d’environ 4958 heures dont 240 heures de manière continue, c’est-à-dire sans interruption de puissance. Cette mission fut une grande réussite, et le moteur à effet Hall de la SNECMA utilisé détient le record en terme de durée de vie avec plus de 10500 heures au point nominal sans défaillance et sans dégradation notable des performances. Le Tableau 1.3 resume les grandeurs caractéristiques relatives à la sonde SMART-1 [21, 22]. La Figure 1.3 illustre la mission SMART-1 et une photo du PPS-1350.

Grandeur	valeur
Masse totale ( $m_0$ )	370 kg
Masse de carburant (Xe)	82kg
Incrément de vitesse ( $\Delta v$ )	3,7 km/s
Puissance électrique ( $P_{el}$ )	1,14 kw
Poussée ( $T$ )	68mN
Impulsion Spécifique $I_{sp}$	1540 s
Efficacité ( $\eta$ )	0,45- 0,60

TABLE 1.3 – Les valeurs moyennes des grandeurs caractéristiques de la mission interplanétaire tout électrique SMART-1 de l’agence spatiale européenne (ESA).

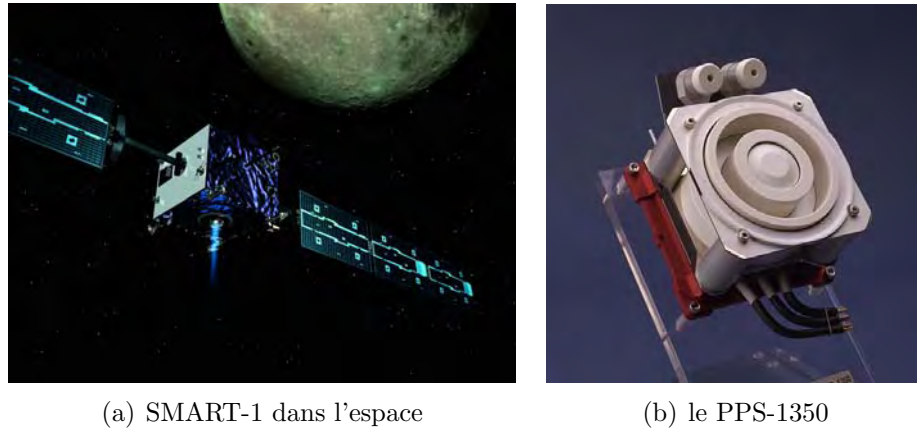


FIGURE 1.3 – a) Le satellite SMART-1 en vol, la traînée bleue claire montre le jet plasmique dû au fonctionnement du propulseur. b) La présentation du moteur à effet Hall PPS-1350 qui a été utilisé comme moyen de propulsion primaire de SMART-1. (Crédit photo : ESA)

## 1.4 Propulseurs à Effet Hall (PEHs)

### 1.4.1 Éléments Constitutifs d'un PEH

Les principaux éléments d'un PEH classique présenté sur la Figure 1.4 sont les suivants :

- un canal plasma constitué en général de céramiques qui est de forme circulaire ⑤. Il sert d'isolant et de chambre de décharge dans laquelle les électrons sont confinés magnétiquement et le gaz (carburant) ionisé ;
- une anode ③ sous forme de rondelle placée au fond de la chambre de décharge et perforée de minuscules trous. Ainsi, l'anode sert aussi de passoire pour les fines particules du gaz à ioniser qui y arrivent par l'intermédiaire de tubes reliés au réservoir du véhicule spatial ;
- une cathode ④ placée en général à l'extérieur du canal plasma, creuse, qui fournit les électrons nécessaires au fonctionnement propre du propulseur ; Dans certains cas comme l'anode, la cathode sert aussi de passoire pour le gaz propulsif. Il est à noter aussi que l'anode et la cathode forment le *circuit électrique* du propulseur électrique. La différence de potentiel entre ces deux électrodes génère un champ électrique dans le canal du moteur pour l'expulsion à grande vitesse des cations du gaz ionisé ;
- un circuit magnétique ① qui constitue le squelette du moteur fait de matériaux ferromagnétiques. Ce circuit génère une topographie spécifique de champ magnétique pour le piégeage des électrons et l'accélération des ions en sortie ;
- des bobines ② qui une fois alimentées, assurent et renforcent la circulation de courant à l'intérieur du moteur propulsif. L'intensité du champ magnétique du dispositif est d'autant plus forte que l'intensité des courants qui traversent les bobines est grande ;



- des supports de fixation <sup>⑥</sup> qui aident à l'insertion et à la fixation du propulseurs sur le satellite.

Sur les propulseurs actuels, le circuit magnétique qui constitue par la suite la problématique de conception optimisée de notre étude, génère un champ magnétique de quelques centaines de Gauss.

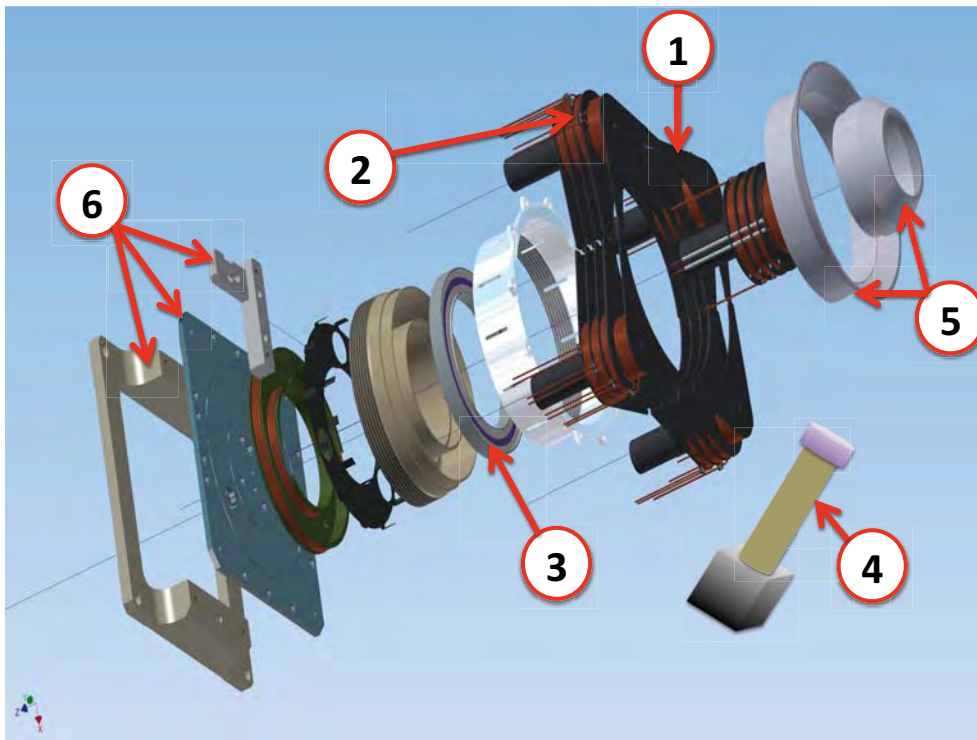


FIGURE 1.4 – Les principaux éléments constitutifs d'un PEH : 1. Circuit magnétique, 2. Bobines, 3. Anode, 4. Cathode, 5. Canal céramique, 6. Support de fixation.

### 1.4.2 Principe de Fonctionnement d'un PEH

Les découvertes de particules subatomiques, les ions par Faraday <sup>5</sup>, les électrons par Thomson <sup>6</sup> et les protons par Rutherford <sup>7</sup>, ont contribué considérablement à faire avancer les recherches scientifiques et la compréhension sur la matière et les éléments constituant notre univers. Ces découvertes ont rendu possible l'émergence de plusieurs domaines de recherche tels que la physique nucléaire et très récemment la physique des plasmas. Ainsi, les scientifiques réalisent qu'ils ont à leur disposition une source alternative d'énergie et/ou de carburant qui peut répondre aux besoins d'énergie avec des technologies de pointe telle que la propulsion électrique des engins spatiaux. Les PEHs utilisent l'interaction dans ce cadre de ces différentes particules subatomiques.

5. Michael Faraday (22 Septembre 1791 - 25 Août 1867) : physicien et chimiste Britannique.

6. Joseph John Thomson (18 Décembre 1856 - 30 Août 1940) : physicien Anglais.

7. Ernest Rutherford (30 Août 1871 - 19 Octobre 1937) : physicien et chimiste Néo-Zélando-Britannique.

Le principe de fonctionnement des PEHs, peut-être décrit comme suit :

- La différence de potentiel entre l'anode et la cathode crée un champ électrique  $\vec{E}$  axial dans le canal plasma.
- Le circuit magnétique génère un champ magnétique  $\vec{B}$  axisymétrique et majoritairement radial.
- Lorsque les électrons quittent la cathode pour se diriger vers l'anode, une grande partie d'entre eux sont piégés par les lignes de champ magnétique et se meuvent selon une trajectoire hélicoïdale autour de ces lignes de champ magnétique. Ces électrons sont soumis à la force électromagnétique existant à l'intérieur du canal aussi connue sous le nom de force Lorentz<sup>8</sup> notée  $\vec{F}_L$  et donnée par  $\vec{F}_L = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , avec  $e$  et  $\vec{v}$  la charge absolue et le vecteur vitesse de l'électron considéré. Cela provoque la modification de leur vitesse et de leur trajectoire. Les électrons qui passent la barrière magnétique vont rentrer en collision avec les atomes de Xénon injectés en fond du canal plasma : il y a ionisation du Xénon. Les cations  $\text{Xe}^+$  (et aussi des cations  $\text{Xe}^{2+}$ ) libérés sont alors expulsés par la force électrique induite par le champ  $\vec{E}$ . Ces cations peuvent atteindre une vitesse d'éjection de 40 km/s (pour une tension de 400 V), et participent à la poussée du propulseur.
- Parallèlement les électrons confinés dans la barrière magnétique sont le siège d'une dérive azimutale  $\vec{E} \times \vec{B}$  d'où un courant azimutal dit courant de Hall (quelques dizaines d'Ampère<sup>9</sup>). La force de Laplace<sup>10</sup> résultante participe aussi à l'amélioration de la poussée.
- Au voisinage du plan de sortie du canal plasma, une partie des électrons générés par la cathode se mélange au plasma éjecté pour ainsi établir la neutralité de celui-ci. Cela est très important pour le bon fonctionnement du propulseur car autrement une interaction des particules de même signe pourrait causer un retour de certaines d'entre elles dans le moteur, ce qui conduirait à un dysfonctionnement du dispositif.

Le principe de fonctionnement d'un PEH est illustré sur la Figure 1.5.

De plus dans certains moteurs plasmiques, une tuyauterie qui relie la cathode au réservoir de gaz permet d'optimiser le processus d'ionisation afin de booster la poussée.

**Remarque 1.1** *Les principaux carburants de ces propulseurs électriques sont les gaz rares (aussi appelés gaz nobles). Ce choix n'est pas hasardeux car les gaz rares sont les plus stables ce qui facilite leur stockage et leur transport. De plus, ils libèrent facilement les électrons et les ions, améliorant ainsi les performances du propulseur. Enfin, parmi les gaz rares, on préfère de loin ceux qui ont une masse*

8. Hendrik Antoon Lorentz (18 Juillet 1853 - 4 Février 1928) : physicien Néerlandais, prix Nobel de physique de 1902.

9. André-Marie Ampère (20 Janvier 1775 -10 Juin 1836) : mathématicien, physicien, chimiste et philosophe Français. Il fait également partie des soixante-douze savants dont le nom est inscrit sur la *tour Eiffel*.

10. Pierre-Simon de Laplace (23 Mars 1749 - 5 Mars 1827) : mathématicien, astronome, physicien et homme politique Français.

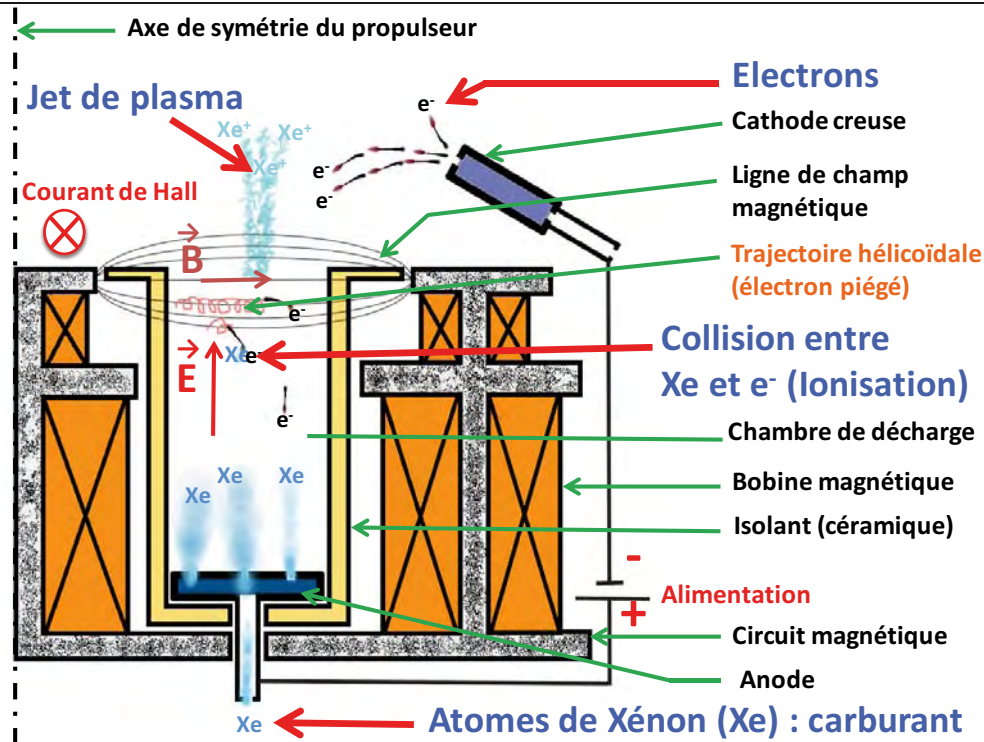


FIGURE 1.5 – Schéma de la coupe transversale d'un PEH montrant son principe de fonctionnement.

Gaz	Helium	Néon	Argon	Krypton	Xénon	Radon
n.e	2	10	18	36	54	86
m.a. [u]	4	20	40	84	131	222

TABLE 1.4 – Les gaz rares avec leur masse atomique (m.a) et leur n.e (numéro électronique) : ce sont les éléments chimiques du groupe 18 dans la classification périodique de Mendeleïev.

atomique (m.a) assez élevée car comme on peut le constater dans l'équation (1.2), la poussée  $T$  est proportionnelle à la masse éjectée. C'est pourquoi, on utilise principalement le Xénon (Xe) qui est le deuxième gaz rare le plus massique après le Radon (Rn). Bien qu'ayant la m.a la plus importante, on n'utilise pas le Radon car c'est un élément radioactif et sa manipulation est dangereuse. Le Tableau 1.4 donne une valeur approximative des m.a des gaz rares en unité de masse atomique (noté :  $u$  et  $1u \simeq 1,66 \times 10^{-27} \text{ Kg}$ ) et du nombre total d'électrons ou numéro électronique (n.e) qu'ils possèdent sur l'ensemble de leur niveau d'énergie. Par exemple, un propulseur à Xénon sera plus efficace qu'un propulseur à Krypton, et trois fois plus efficace qu'un propulseur à Argon. Ceci étant l'Argon et le Krypton sont des gaz moins onéreux et de nombreuses études portent actuellement sur la faisabilité de propulseurs Krypton ou Argon, voir par exemple les articles [23, 24, 25, 26].



## 1.5 Etat de l'Art de la Conception du PEH

### 1.5.1 Influence de la Topologie général de l'Architecture d'un Propulseur Electrique sur son Fonctionnement

La topologie générale de l'architecture d'un PEH contribue logiquement à ses performances. Parmi les constituants d'un PEH et les concepts physiques mis en jeu pour la génération du plasma, de la poussée et des performances globales du système, on distingue :

- la géométrie de la cathode,
- la géométrie du canal plasma,
- la topologie du champ magnétique dans et en sortie du canal plasma.

Voir les figures illustratrices 1.4 et 1.5.

#### 1.5.1.1 Influence de la Géométrie de la Cathode

Comme l'anode, la cathode peut servir à l'injection du gaz (en débit faible comparativement à celui de l'anode) mais sa fonction principale est l'émission des électrons. Sa géométrie et sa position par rapport au canal plasma jouent un rôle important. En effet des études expérimentales ont montré que plus elle est proche du canal plus les électrons émis sont efficaces pour l'ionisation. Dans le moteur ionique à grille NSTAR de la NASA, il y avait initialement 2 cathodes respectivement à l'intérieur et l'extérieur du canal plasma. La cathode interne participe à l'ionisation du gaz tandis que la cathode externe sert à neutraliser le faisceau des cations éjectés (voir par exemple la Figure 1.5). Soulignons que ce concept de séparation de la zone d'ionisation et d'accélération est maintenant réactif avec la notion de *propulseur double étage*, pour plus de détails sur ce concept voir les travaux de J. P. Boeuf, L. Garrigues, G. J. Hagelaar, C. Boniface et leurs co-auteurs [15, 27, 28, 29]. Le PPS-1350 du SMART-1 était quant à lui équipé de deux cathodes placées à l'extérieur du canal mais dont les fonctions respectives étaient aussi d'améliorer le taux d'ionisation, la neutralisation du faisceau de cations et l'accélération en sortie du canal, voir les Figures 1.3(b) et 1.5. La configuration de la cathode n'est pas conditionnée uniquement par l'efficacité d'émission des particules. La cathode est aussi exposée à la radiation thermique et aux bombardement des électrons et des ions du Xénon ce qui entraîne son érosion et la limitation de la durée de vie du moteur. Différentes géométries des orifices et d'épaisseurs des plaques de la cathode ont été testées. Des plaques plus épaisses et des orifices plus larges permettent d'éviter ces attaques qui érodent la cathode. Cependant, il a été aussi remarqué qu'une plaque trop épaisse ou ayant des orifices de diamètres trop larges réduisaient les performances du moteur [20, 31]. Il devient alors évident que le choix de la géométrie de la cathode est problématique. Une solution envisagée par des chercheurs japonais est l'introduction d'un concept nouveau connu sous l'acronyme ERC (Electron Cyclotron Resonance). Cette technologie a permis la fabrication de moteurs plasmiques proches des moteurs à grilles mais sans cathode. Les électrons sont générés par chauffage micro-onde à résonance cyclotronique électronique avec une fréquence d'environ 2.5 GHz. Le premier test hors laboratoire de ce concept

s'est fait lors de la mission spatiale japonaise HAYABUSA soutenue par JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency). Lancé en Mai 2003, HAYABUSA était équipé de 4 moteurs ERC [31]. Bien que ces moteurs fonctionnèrent durant les missions sans problèmes d'érosion leurs capacités sont restées assez médiocres par rapport aux moteurs à effet Hall. Dans le rapport [32] se trouvent beaucoup de détails et des tests accompagnés de données chiffrées des résultats d'expérimentation sur la configuration de la cathode.

### 1.5.1.2 Influence de la Géométrie du Canal Plasma

Le canal plasma représente le centre de détention et de libération des particules plasmiques. Il est en matériau diélectrique, ce qui lui permet d'isoler le plasma des parties métalliques du propulseur. Le plasma propulsif ronge peu à peu ses parois internes par l'effet des chocs élastiques des ions et des électrons. Ainsi au cours du fonctionnement du moteur, le canal est érodé au fur et à mesure que le véhicule spatial se déplace. Une idée simpliste visant à limiter l'érosion consisterait à augmenter les dimensions du canal plasma. Ainsi, on peut imaginer qu'un canal plasma à grand diamètre verrait ses parois plus éloignées des zones plasma à forte densité. Malheureusement, les performances sont directement liées aux dimensions du canal plasma. La profondeur est ainsi dimensionnée en fonction du rayon de Larmor<sup>11</sup> des ions et des électrons pour favoriser les collisions (cause de l'ionisation du gaz noble). Les propulseurs à plasma stationnaire SPTs développés par les Russes (Fakel) sont classés en fonction de la taille du diamètre externe du canal. Le SPT-50 a un diamètre externe de 50 mm, voir Figure 1.1(b). L'industriel Français SNECMA classe ses propulseurs en fonction de la puissance électrique. Ainsi, le PPS-1350 fonctionne en régime nominal à une puissance de 1350 W, avec un diamètre externe de 100 mm [33]. Soulignons que le canal dans le plan de sortie est divergent pour offrir une surface d'appuie plus large au gaz éjecté. A travers les formules de la masse de carburant consommé (1.1), de la poussée (1.2) et de l'impulsion spécifique (1.3) on montre que la vitesse d'éjection des ions est un paramètre très important en vue d'avoir une bonne performance de l'engin spatial. Des études récentes, notamment dans la thèse de G. Bourgeois [24] ont cependant porté sur la variation de la largeur du canal. Ces tests effectués sur un prototype de laboratoire en variant la largeur du canal selon 3 configurations  $S_0$ ,  $2S_0$  et  $3S_0$  ( $S_0$  correspond à un dimensionnement proche d'un PPS-200) ont donné des résultats intéressants. Au cours de ces expériences l'évaluation de la vitesse d'expulsion des ions Xénon à 100 mm du plan de la sortie du canal a donné 4,7 km/s ( $\sim 15$  eV), 9 km/s ( $\sim 54,4$  eV) et 7,8 km/s ( $\sim 41,4$  eV) pour  $S_0$ ,  $2S_0$  et  $3S_0$  respectivement. En conclusion, l'énergie cinétique communiquée aux ions augmente avec la largeur du canal plasmique. Ces analyses sont très pertinentes mais ne permettent pas de conclure définitivement sur le design du canal. En effet, avec ces résultats, on se rend compte que l'évolution de l'énergie cinétique acquise par les particules n'est pas une fonction croissante des différentes sections. De plus, la profondeur du canal était aussi fixée pour ces tests.

---

11. Joseph Larmor (1 Juillet 1857 - 19 Mai 1942) : physicien, mathématicien et homme politique Irlandais.

### 1.5.1.3 Influence de la Topologie Magnétique

La topologie magnétique d'un propulseur inclut la distribution spatiale à l'intérieur du canal plasma et à l'extérieur au-dessus du plan de sortie (de 5 à 10 cm du plan de sortie, voir par exemple les Figures 1.7(a) et 1.8). La topologie magnétique est un élément fondamental du propulseur à 2 titres. D'une part, le circuit magnétique associé représente plus de 50% de la masse totale du propulseur, ce qui est très impactant pour le coût global du propulseur. D'autre parts, la topologie magnétique influe simultanément sur les performances et la durée de vie du propulseur. Pendant de très nombreuses années, la communauté scientifique du plasma a étudié les PEHs sur la base d'une topologie magnétique bien connue et qui a peu changé. Cependant, depuis quelques années, un intérêt croissant est donné à l'étude des interactions champ-plasma et à la recherche de nouvelles topologies magnétiques [34, 35, 36, 37, 38].

#### 1. Influence du champ électromagnétique sur les particules chargées

La propagation des ondes électromagnétiques agit sur la dynamique des particules issues de la différence de potentiel appliquée au circuit électrique (entre l'anode et la cathode) et sur le taux d'ionisation du gaz donc sur le comportement global du plasma propulsif. En effet, le champ électromagnétique modifie la dynamique des électrons et des cations du gaz ionisé en leur communiquant une vitesse solution de l'équation (1.6). Par ailleurs, le champ magnétique joue un rôle de filtre au sein du plasma en séparant les ions selon leur quantité de charge. Cette séparation se fait à travers le rayons moyen de courbure de leur trajectoire appelé aussi rayon de Larmor (voir l'équation (1.7)).

- *Mouvement d'une particule plasmique* : La relation fondamentale de la dynamique de Newton appliquée à une particule se déplaçant dans un champ électromagnétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.6)$$

avec  $m$ ,  $\vec{v}$ ,  $q$  la masse, le vecteur vitesse, et la charge de la particule considérée. On note que dans l'équation (1.6), l'expression de droite est celle de la force de Lorentz.

- *Rayon de Larmor* : Le rayon de Larmor de la trajectoire hélicoïdale des particules chargées autour des lignes de champ magnétique notamment les électrons est donné par :

$$R_l = \frac{m\mathbf{v}_{ort}}{|q|\|\vec{B}\|}, \quad (1.7)$$

avec :

- $\mathbf{v}_{ort}$  le module de la composante orthogonale du vecteur vitesse  $\vec{v}$ ,
- $\|\vec{B}\|$  l'intensité du champ magnétique.

Ainsi, ce rayon  $R_l$ , fonction de la charge permet de différencier les espèces subatomiques suivant leur masse et leur charge.

- *Vitesse de dérive* : Le plasma produit par un propulseur électrique est soumis à un mouvement de translation d'ensemble des particules le constituant suivant un vecteur vitesse  $\vec{v}_D$  induit par l'effet Hall dans la direction azimuthale  $\vec{E} \times \vec{B}$ .  $\vec{v}_D$  est appelée vitesse de dérive. Elle est indépendante de la charge, de la masse des particules considérées et est définie par :

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} . \quad (1.8)$$

## 2. Influence du champ magnétique sur la durée de vie et sur la performance du propulseur électrique

Pour un moteur ionique, la cartographie magnétique choisie est généralement celle d'un champ intense au centre du canal sur l'axe du canal et principalement radial au niveau du plan de sortie du canal. Les zones où le champ magnétique est maximal constituent des zones de piégeage des électrons. Les lignes de champ magnétique assujettissent les électrons à rester dans la chambre d'ionisation ce qui augmente leur probabilité (voisinant 90%) de rentrer en collision avec les atomes du gaz injecté : d'où une augmentation du taux d'ionisation et une amélioration de la poussée générée (car dépendant de la quantité de particules éjectées, voir la formule (1.2)). En outre, la maximisation du champ au centre du canal a aussi pour effet la création d'une zone de plasma dense, ce qui minimise les chocs des particules contre les parois céramiques. Ces chocs, rappelons le, sont des facteurs de réduction de la durée de vie du moteur parce qu'ils provoquent l'érosion des parois céramiques puis celles du circuit magnétique.

La topologie magnétique idéale présente respectivement par rapport au canal céramique des lignes internes convexes, des lignes externes concaves et quasi-rectilignes au voisinage du plan de sortie. Ces courbures de lignes de champ magnétique qui sont appelées *lentilles magnétiques* ou dans la littérature *magnetic lens* (ML) sont illustrées sur la Figure 1.6. Cela fait du circuit magnétique l'âme des propulseurs électriques car il est l'unique composant en mesure d'assurer la génération de ces différents types de ligne de champ dans le canal plasma. Afin d'assurer ses fonctions, le circuit magnétique à lui aussi sa propre configuration topologique à respecter dont nos méthodes d'optimisation topologique doivent permettre sa conception. Le « **Magnetic Shielding** » (MS : blindage magnétique) est une variante des lentilles magnétiques proposée par A. I. Morozov dans les années 1960 pour la configuration des SPTs. La distribution des lignes de champ se caractérise par une plus forte inclinaison par rapport au plan de sortie du canal. Ceci favorise le confinement électronique du plasma au centre protégeant ainsi les parois du canal (voir des illustration sur la Figure 1.6). La faisabilité et l'efficacité du blindage magnétique pour les PEHs ont été montrées et validées sur des prototypes de laboratoire au cours des expériences effectuées par le centre de recherche spatial JPL (de la NASA), plus précisément par R. Hofer et ces coéquipiers [39, 40]. La Figure 1.6 montre une topographie ma-

gnétique de type MS (comparativement aux lentilles magnétiques classiques ML).

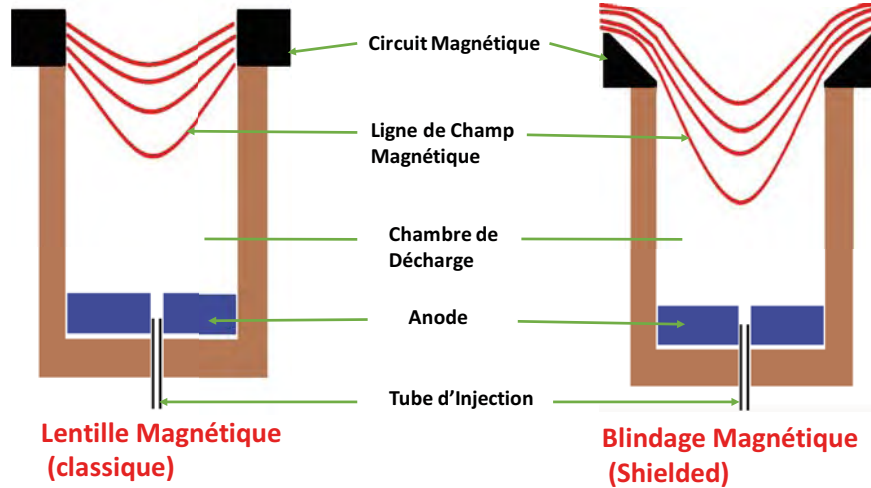


FIGURE 1.6 – Schéma de la coupe transversale d'un PEH avec des lignes de champ idéales présentant des lentilles magnétiques, schéma dans le plan  $(r, z)$  indiquant les différents éléments caractéristiques d'une topologie magnétique d'un PEH.

### 3. Topologie Standard du Champ Magnétique (PEH Classique)

Les moteurs à effet Hall produisent une topologie spécifique de champ magnétique servant à la fois à l'ionisation par confinement magnétique des électrons et à l'accélération des ions en sortie. Cette Topologie du champ magnétique peut se décomposer en trois zones [15] :

- *Zone Anodique* (zone 1) : C'est la partie profonde du canal plasma proche de l'anode où le champ magnétique est relativement faible et la densité des particules neutre très forte. Cette zone est caractérisée par une bonne conduction électronique et donc par un faible champ électrique.
- *Zone d'Ionisation* (zone 2) : Cette région est située juste avant la sortie du canal. Dans cette zone, le taux d'ionisation est maximum. Le champ magnétique devient important, les électrons piégés dans les lignes de champ magnétique entrent en collision avec les atomes du gaz propulsif provoquant ainsi leur ionisation. Elle contient en majorité les lignes de champ convexes (lentille magnétique) et rectiligne.
- *Zone d'Accélération* (zone 3) : Cette région comprend les voisinages du plan de sortie et les lignes de champ y sont principalement concaves. Le champ électromagnétique est assez important. En revanche la densité des particules neutres est faible et peu d'ions sont créés. La mobilité électronique dans la direction axiale est faible. On assiste à une accélération des ions qui seront ensuite éjectées à des vitesses de l'ordre de 20 km/s. La densité du plasma y est réduite comparativement aux zones 1 et 2.

Ces zones différentes sont présentées sur la Figure 1.7.

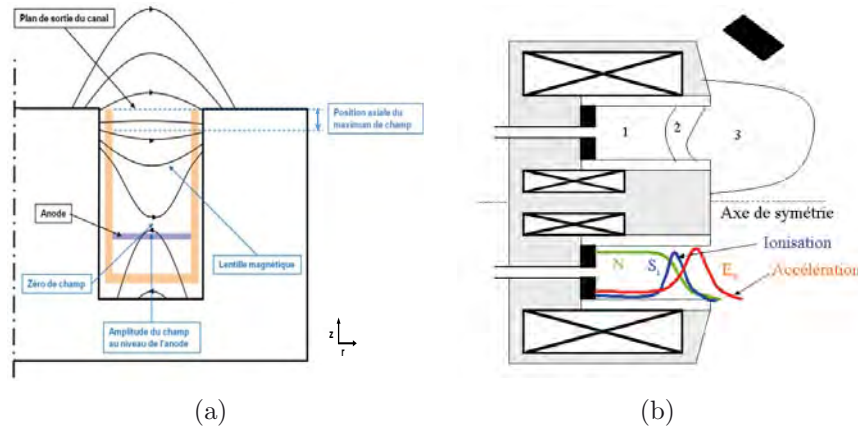


FIGURE 1.7 – Coupe transversale d'un PEH montrant la topologie magnétique standard : a) Lignes de champ magnétique avec les lentilles magnétiques et les valeurs extrêmes du champ en différentes parties du canal plasmique. b) (**En haut**) représentation des différentes zones d'une topologie magnétique : zone anode (1), zone d'ionisation (2), et zone d'accélération (3). (**En bas**) : Profils axiaux moyens (schémas) du champ électrique  $E$ , du taux d'ionisation ( $S$ ) et de la densité des éléments neutres ( $N$ ).

#### 1.5.1.4 Circuit Magnétique de Référence du PEH

Le circuit magnétique est l'ossature du propulseur. Il est constitué de matériaux ferromagnétiques typiquement de fer pur et de conducteurs, et il sert de routine entre les parties soft et hard du propulseur. Dans le paragraphe 1.5.1.3, on a montré l'influence et le rôle important du champ magnétique et seul un circuit magnétique dédié est capable d'établir à l'intérieur du canal du moteur et à ses environs la topologie magnétique souhaitée. Ce circuit magnétique se compose généralement de :

- *noyaux magnétiques*, formés de colonnes latérales dont les axes sont parallèles à l'axe principal du propulseur. Ces colonnes entourées de bobines s'appuient sur une plaque ferromagnétique. Cette plaque magnétique est pourvue d'orifices laissant un passage pour les tubes d'injection du gaz.
- *pièces polaires*, ce sont des arborescences des noyaux magnétiques. Ces pièces ne sont pas forcément constituées de la même matière que le reste du circuit magnétique. Situées à proximité de la sortie du canal de décharge, les pièces polaires contraignent le champ magnétique à être majoritairement radial au niveau du plan de sortie.
- *écrans magnétiques*, ce sont les parois d'un cylindre additionnel en matériaux ferromagnétiques et localisés entre les bobines externes et le canal plasma. Ces écrans ont plusieurs fonctions. D'une part, ils participent à la génération du gradient de champ magnétique en sortie de canal et permettent de dévier des lignes de champ des parois du canal plasma. D'autre part, ils constituent des barrières thermiques très efficaces pour protéger les bobines externes.



Les dimensions et les formes de ces différentes parties du circuit magnétique sont à déterminer pour chaque type de topologie magnétique requise. La Figure 1.8 illustre les différentes parties du circuit magnétique pour un moteur à plasma stationnaire.

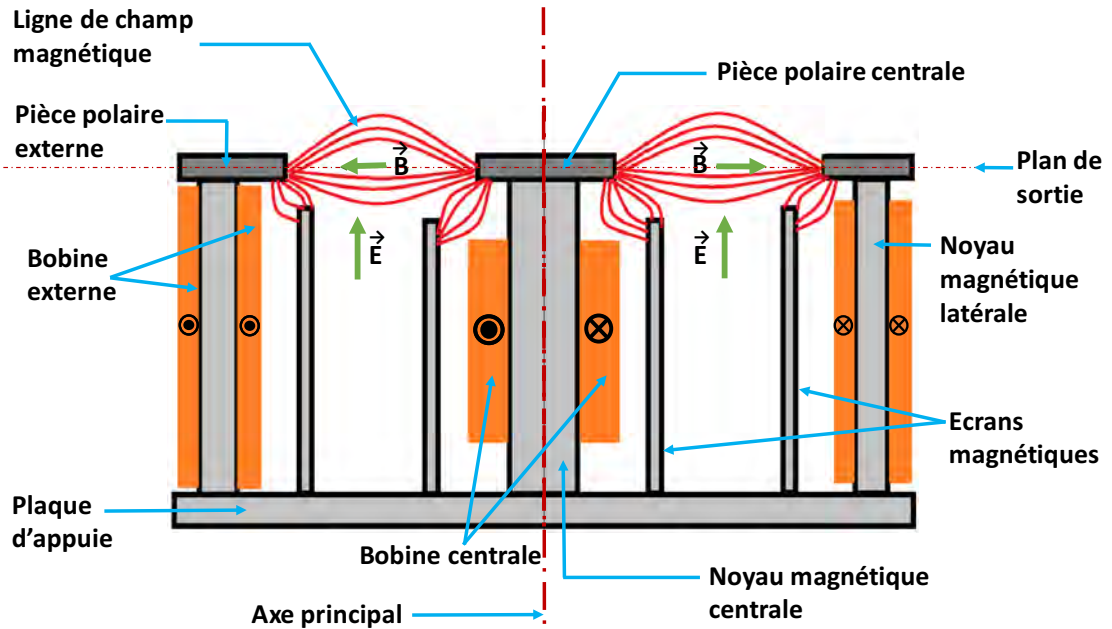


FIGURE 1.8 – Schéma de la coupe transversale du circuit magnétique d'un propulseur à effet à Hall.

Au vue de l'influence de la géométrie de l'architecture des propulseurs électriques, il est clair que leur conception optimale nécessite beaucoup de travaux de recherche à la fois théoriques, expérimentaux et pratiques.

### 1.5.2 Problème de Conception Optimale du Circuit Magnétique pour les PEHs

Le circuit magnétique du PEH doit générer dans un canal plasma un champ magnétique axisymétrique dont la distribution spatiale dans un plan (x,y) est loin d'être uniforme. En effet, il s'agit principalement de garantir des zones à faible champ magnétique en fond de canal, des zones de champ intense au centre du canal et un fort gradient de champ en sortie du canal pour accélérer les ions et générer la poussée. A cela s'ajoutent des contraintes magnétiques plus actuelles consistant à protéger les parois du canal par des lignes de champ parallèles à ces parois afin d'améliorer la durée de vie du propulseur. Enfin soulignons que le canal plasma constitue un entrefer dont les dimensions sont du même ordre de grandeur que celles du circuit magnétique. Ainsi, pour un PPS-1350 dont le diamètre externe et la longueur du circuit magnétique est de l'ordre de la dizaine de centimètres le canal plasma a une largeur de 4 cm pour une profondeur de 7 cm. La

conformation d'un champ magnétique non uniforme dans un tel entrefer induit une difficulté supplémentaire dans la définition du circuit magnétique par le fait qu'il est difficile voire impossible dans ce cas de pouvoir développer un modèle analytique sur lequel se baser pour établir un pré-dimensionnement. Par ailleurs, il faut aussi tenir compte des contraintes de fonctionnement et en particulier de la tenue thermique du circuit. La température aux parois céramiques peut atteindre 850°C ce qui induit sur le circuit magnétique qui est proche un environnement extrême. Le recours à des matériaux supportant les très hautes températures de fonctionnement est indispensable. Par ailleurs, il faut s'assurer que le propulseur puisse fonctionner 10000 heures sans problème avec une alimentation électronique relativement simple (courant continu unidirectionnel). Le circuit doit donc être robuste, relativement simple et économe en terme de consommation d'énergie électrique.

Enfin soulignons qu'avec un coût du kilogramme embarqué autour de la dizaine de k€, la minimisation de la masse est cruciale pour l'attractivité du propulseur.

Ce circuit est composé de quatre colonnes externes supportant des bobines alimentées par un même courant continu. Ces colonnes qui reposent sur une plaque d'appui sont surmontées de pièces polaires externes pour guider le flux du champ électromagnétique. Le matériau utilisé pour la constitution de ces différentes pièces est du fer doux. Au centre du circuit est logée une colonne centrale bobinée. L'incurvation des lignes de champ et la génération du gradient de champ est assurée par les pièces polaires mais aussi en grande partie par des écrans magnétiques circulaires, qui servent aussi de drain et de protection thermique pour les bobines. Ce circuit magnétique est le fruit d'années de recherches empiriques pour la mise au point et l'obtention du champ magnétique désiré à puissance électrique ciblée.

Les principaux acteurs des lanceurs spatiaux souhaitent maintenant diversifier leur offre en proposant des plateformes utiles de diverses gammes. Cela conduit à la conception de propulseurs adaptés. Les puissances électriques visées vont du kW jusqu'à la dizaine de kW. Il est donc nécessaire de pouvoir disposer d'une méthodologie de conception fiable et rapide des circuits magnétiques de propulseurs. Le problème de conception étant de satisfaire une topologie de champ magnétique dans un canal plasma fixé avec des contraintes de fonctionnement et d'environnement données. C'est dans cette optique que le recours à la conception optimisée par résolution de problèmes inverses prend tout son sens.

Au cours de la résolution de ce problème de conception optimale, nos analyses porteront principalement sur les phénomènes électromagnétiques qui règnent dans le canal et ses environs et qui agissent sur les différentes particules plasmiques. Ces phénomènes physiques sont modélisés par des Equations aux Dérivées Partielles (EDPs), notamment les équations de Maxwell<sup>12</sup> en magnétostatique. Ce qui ajoute une couche de difficulté à notre problème de conception car il faut considérer et satisfaire des contraintes EDPs au cours des processus d'optimisation mathéma-

---

12. James Clerk Maxwell (13 Juin 1831 - 5 Novembre 1879) : physicien et mathématicien Écossais. Il est principalement connu pour avoir unifié en un seul ensemble d'équations, les *équations de Maxwell*, l'électricité, le magnétisme et l'induction, en incluant une importante modification du *théorème d'Ampère*. Albert Einstein ( 14 Mars 1879 - 18 Avril 1955) décrivait les travaux de Maxwell comme les « plus profonds et fructueux que la physique ait connu depuis le temps de Newton ».



tique. Notre démarche de conception optimale de circuits magnétiques optimaux peut se résumer sur le diagramme de la Figure 1.9 (le profil champ  $B_x$  du est une illustration).

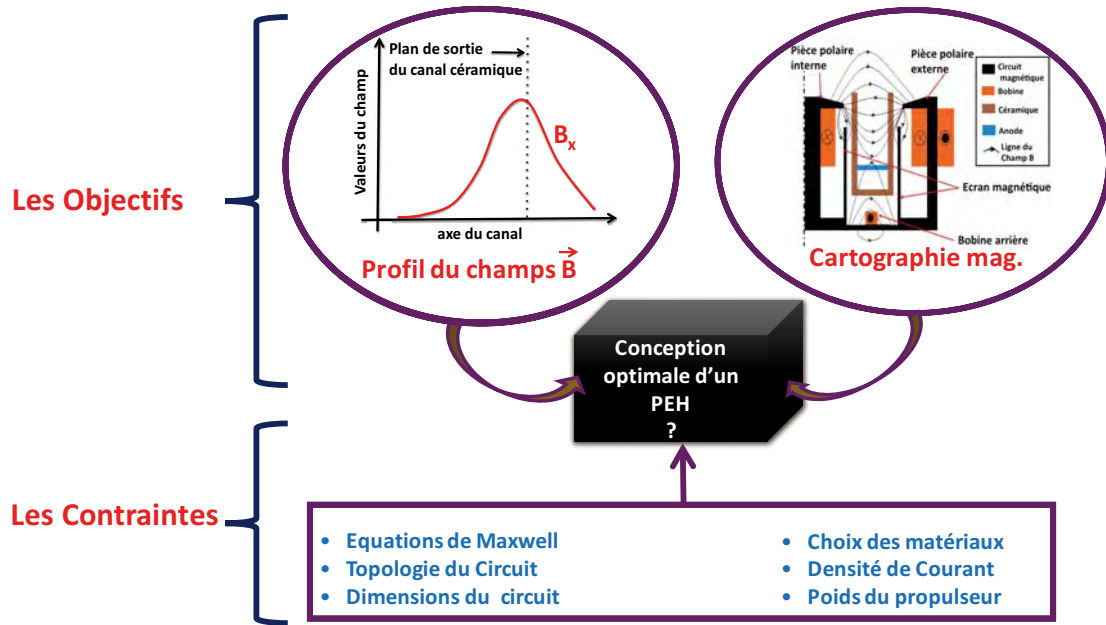


FIGURE 1.9 – Diagramme représentant notre démarche pour concevoir un circuit magnétique optimal pour Propulseur Electrique à effet Hall (PEH).

## 1.6 Conclusion

Ce premier chapitre a été consacré à une présentation générale de la propulsion spatiale et plus spécifiquement à la propulsion spatiale électrique. Après avoir explicité les principales caractéristiques définissant la propulsion (poussée, impulsion spécifique et efficacité), les deux principales technologies, à savoir la propulsion chimique et la propulsion électrique ont été mises en comparaison. Dans le cadre de notre étude focalisée plus spécifiquement sur la propulsion des satellites et des sondes interplanétaires, la propulsion électrique a été détaillée pour finalement se consacrer à la description du concept du propulseur électrique à effet Hall. Les constituants fondamentaux du propulseur sont le champ électrique généré entre une cathode et une anode, le gaz propulsif à ioniser et à accélérer, le canal plasma et le champ magnétique produit dans le canal plasma par un circuit magnétique dont la masse représente au moins 50% de la masse totale du propulseur. La topologie du champ magnétique dans le canal plasma est spécifique et doit répondre à plusieurs fonctions dont l'ionisation du gaz, l'accélération du gaz ionisé en sortie de canal et la protection des parois du canal vis-à-vis du bombardement électronique. De ce fait la définition du circuit magnétique devient particulièrement complexe d'autant plus qu'il faut y ajouter de fortes contraintes environnementales (tenue

en température) et économiques (minimisation de la masse et augmentation de la durée de vie). Le recours à des méthodes classiques du concepteur en systèmes électromagnétiques telles que le pré-dimensionnement d'un circuit via les théorèmes de la magnétostatique ou le développement d'un modèle analytique est difficilement envisageable compte tenu de la distribution spatiale du champ dans l'entrefer (canal plasma large) requise. Dans ce contexte on se tourne naturellement vers des simulations numériques par résolution de problèmes inverses en magnétostatique, soit construire empiriquement un circuit magnétique qui satisfasse une carte de champ. Dans cette thèse, il s'agira donc de développer des modèles d'optimisation mathématiques résultants de ces problèmes inverses de conception qui nous permette de définir un circuit magnétique sans a priori et sans modèle analytique et qui garantisse l'obtention d'une topologie magnétique dans un espace géométrique donné.

## Chapitre 2

# Méthodes et Modèles d'Optimisation pour la Conception de Propulseurs Électriques

## 2.1 Introduction

L'évolution de l'Homme a atteint un stade où l'utilisation des résultats, des outils et des méthodes provenant de la recherche scientifique occupe une place très importante dans l'aide à la décision et à la réalisation de tous les projets. Ainsi, afin d'améliorer si possible le rendement de ses activités, l'une des branches des mathématiques appliquées dédiée à ces problématiques a fait son apparition : c'est l'**optimisation**.

Dans ce qui suit, nous présenterons les concepts fondamentale des modèles d'optimisation. En particulier, nous détaillerons les différentes étapes de la formulation de notre problème de conception optimale des circuits magnétiques pour PEHs, plus l'analyse de la sensibilité du problème de conception par des méthodes d'optimisation topologique.

## 2.2 Généralités et Notions Fondamentales

L'optimisation peut se définir comme étant l'ensemble des procédures permettant de choisir la *meilleure valeur* par rapport à un ensemble de choix possibles. De nos jours, les théories et les applications de l'optimisation ont beaucoup progressé grâce à l'élaboration d'algorithmes d'optimisation de plus en plus efficaces et à la puissance croissante des calculs sur ordinateur.

Ainsi, avec les méthodes d'optimisation mathématiques, on arrive de manière rationnelle et rigoureuse à proposer des solutions pour des problèmes complexes et variés en Informatique (temps d'exécution des tâches et l'utilisation des ressources), en Economie (maximisation des profits, minimisation des dépenses), en Chimie (conception d'un réacteur chimique, rendement des réactions chimiques), en Mécanique (forme des objets tels que les poutres des bâtiments et ponts, la carrosserie des automobiles, le fuselage et les ailes des avions), en Génie Electrique ou en Electromagnétisme (maximisation des performances et réduction des pertes de systèmes électromécaniques comme les machines électriques).

### 2.2.1 Formalisme du Problème d'Optimisation

Une formulation générale d'un problème d'optimisation qui consiste à minimiser une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  sous des contraintes qui sont définies par des fonctions  $(g_i)_{1 \leq i \leq p}$  et  $(h_i)_{1 \leq i \leq q}$ , avec  $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ , peut être donnée par :

$$(\mathbb{P}_{\text{cont}}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ \text{s.c. :} \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, q \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.2)$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, q \quad (2.3)$$

Dans le problème  $(\mathbb{P}_{\text{cont}})$  :

- la fonction  $f$  est appelée le critère, fonction objectif ou fonction coût,

- la variable  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^T$  est l'inconnue. Chaque composante  $x_i$  de  $x$  est appelée variable de décision, de conception ou de contrôle (selon l'application pratique du modèle) et  $n$  est la taille du problème.
- $(g_i)_{1 \leq i \leq p}$  (respectivement  $(h_i)_{1 \leq i \leq q}$ ) définissent les contraintes d'inégalité (respectivement d'égalité).
- L'ensemble  $\mathcal{E}_{\text{adm}} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p; h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q\}$  est appelé ensemble réalisable ou admissible.
- Un vecteur  $x^*$  est une solution de  $(\mathbb{P}_{\text{cont}})$  si et seulement si, il est dans  $\mathcal{E}_{\text{adm}}$  et pour tout  $x$  dans  $\mathcal{E}_{\text{adm}}$ , on a :  $f(x) \geq f(x^*)$ .  
Par la suite, on appellera  $x^*$  un **minimum** de  $(\mathbb{P}_{\text{cont}})$ .
- On note :  $\underset{x \in \mathcal{E}_{\text{adm}}}{\operatorname{argmin}}\{f\}$  (ou simplement  $\operatorname{argmin}\{\mathbb{P}_{\text{cont}}\}$ ) l'ensemble des minima du problème  $(\mathbb{P}_{\text{cont}})$  (c'est-à-dire  $x^* \in \operatorname{argmin}\{\mathbb{P}_{\text{cont}}\}$ ).

Notons que les problèmes de maximisation ont les mêmes notions fondamentales que ceux de minimisation. Dans cette thèse, les problèmes que nous considérerons sont des minimisations. C'est ainsi que nous nous focaliserons sur la minimisation en présentant les terminologies relatives, et ce sans perte de généralité car maximiser une fonction ( $f$ ) peut se ramener à la minimiser en prenant par exemple son opposée ( $-f$ ).

La classification des problèmes d'optimisation peut être effectuée selon plusieurs considérations telles que la nature de l'ensemble admissible  $\mathcal{E}_{\text{adm}}$ , la relation de dépendance liant les contraintes et le critère aux variables de décision et aussi selon la régularité des fonctions définissant le problème.

### 2.2.1.1 Espace des Variables de Décision : Continu et Discret

$(\mathbb{P}_{\text{cont}})$  est un problème d'*optimisation continue* car il est défini sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  (en excluant le cas où il existerait une ou plusieurs contraintes qui induisent une restriction de  $x_i$  à des valeurs entières). Il existe aussi des problèmes dans lesquels les variables ne peuvent être que des nombres entiers, ce sont des problèmes d'*optimisation discrète*. Par exemple, le problème d'optimisation du nombre de couches d'un bobinage ou du nombre d'encoches d'une machine électrique. Dans le cas discret, une formulation peut être obtenue par exemple en remplaçant l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  par l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbb{Z}^n$ . Certains problèmes contiennent à la fois des variables discrètes et continues. Dans ce cas le problème est dit d'*optimisation mixte*. Par exemple, dans le problème de dimensionnement du circuit magnétique pour propulseur électrique, les grandeurs géométriques sont continues tandis que le nombre de spires du bobinage est entier. Le problème d'optimisation est donc mixte.

Notons que les problèmes d'optimisation discrète sont aussi souvent appelées *optimisation combinatoire*. Dans  $(\mathbb{P}_{\text{cont}})$  par soucis de simplification, nous avons pris la variable  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , en toute généralité la variable d'optimisation peut appartenir à des espaces très variés. C'est le cas en optimisation de forme et topologique où la variable peut être un domaine géométrique ou des fonctions (comme en théorie du contrôle optimal) .

### 2.2.1.2 Contraintes : Optimisation avec Contraintes et sans Contrainte

Par sa définition ( $\mathbb{P}_{\text{cont}}$ ) est un problème d'*optimisation avec contraintes* du fait des équations (2.2) et (2.3). En conception, la plupart des problèmes d'optimisation ont des contraintes plus ou moins complexes. Dans le domaine spatial par exemple, les contraintes géométriques prenant en compte l'insertion du dispositif optimal dans le reste de l'appareil et doivent aussi être associées à la contrainte de poids. Mais les théories de base ont été établies pour les problème généraux, c'est-à-dire sans cette contrainte. Ainsi, afin d'utiliser les mêmes approches dans les deux cas, il existe des techniques (dépendant du problème) permettant de passer du cas avec contraintes au problème sans contrainte en utilisant par exemple une *formulation Lagrangienne*<sup>1</sup> associée au problème.

### 2.2.1.3 Optimisation Linéaire, Convexe et Quadratique

Les relations de dépendances reliant les variables de contrôles du problème aux fonctions définissant le critère et les contraintes sont très importantes en optimisation. En effet, leur complexité induit des difficultés supplémentaires dans l'obtention d'une solution au problème tant au niveau théorique que numérique. Ainsi, dans ( $\mathbb{P}_{\text{cont}}$ ) si les fonctions  $f$ ,  $g_i$  et  $h_j$  sont *affines* (resp. *convexe*) alors on a un problème d'*optimisation linéaire* (resp. *optimisation convexe*). Autrement le problème est dit d'optimisation non linéaire/non convexe. Un peu à cheval entre l'optimisation linéaire et l'optimisation convexe, il y a l'*optimisation quadratique* où le critère et les contraintes sont quadratiques. En optimisation convexe le domaine admissible  $\mathcal{E}_{\text{adm}}$  doit être aussi convexe. La littérature des théories et des outils numériques (logiciels) de résolution de problèmes linéaires, quadratiques et convexes est bien fournie<sup>2</sup>. Par ailleurs les premiers résultats en optimisation mathématiques et numériques furent ceux de la résolution des problèmes linéaires avec la *méthode du simplexe*<sup>3</sup> dans les années 1940. Plus de détails se trouvent dans la bibliographie de G. B. Dantzig notamment dans [41, 42, 43].

### 2.2.1.4 Différentiabilité du Problème en Optimisation

En optimisation, les *dérivées* (gradient ou de manière générale les différentielles) des fonctions du problème jouent un rôle capital dans la détermination de l'optimum. Bien que essentielle, cette information n'est pas toujours facilement accessible. Par ailleurs, il existe des problèmes où elle n'est même pas définie pour certaines fonctions. Ainsi, on distingue :

- *optimisation différentiable* : c'est lorsque toutes les fonctions  $f$ ,  $g_i$  et  $h_j$  sont continûment différentiables,

1. Cette terminologie vient de Joseph Louis, comte de Lagrange (25 Janvier 1736 - 10 Avril 1813) qui était un mathématicien, mécanicien et astronome Franco-Italien.

2. C'est pourquoi on essaie au maximum de se ramener à ces classes d'optimisation si possible en utilisant des techniques telles que le changement de variables ou la décomposition en parties convexes et concaves.

3. Cette méthode d'optimisation linéaire a été développée par George Bernard Dantzig (1914-2005) un mathématicien Américain. Il fut l'un des fondateurs de la Recherche Opérationnelle.

- *optimisation non différentiable* : c'est lorsque il existe au moins une des fonctions  $f$ ,  $g_i$  et  $h_j$  qui est non différentiable.

En optimisation non différentiable en lieu et place de la différentielle classique on utilise un « object » beaucoup plus general appelé sous-différentiel de  $f$  et noté  $\partial f(\cdot)$ . Le *sous-différentiel* est une notion fondamentale en analyse convexe et est très utile en optimisation convexe non différentiable. Plus de détails sur le sous-différentiel et son utilisation en optimisation se trouve dans les livres de Jean-Baptiste Hiriart-Urruty et Claude Lemaréchal, voir [44, 45]. La littérature, propose aussi d'autres approches telles que la *différentiation automatique* permettant d'obtenir la dérivée de certaines fonctions complexes<sup>4</sup> de manière numérique sans approximation en suivant le principe de la dérivation des fonctions composées [46]. Il existe aussi des méthodes d'optimisation dites d'*optimisation sans dérivées* basées sur des modèles d'approximation polynomiale des fonctions du problème afin d'utiliser des techniques d'optimisation différentiable [47]. Ces méthodes d'optimisation sans dérivées sont très efficaces sur des problèmes connus sous l'appellation de « Boîte Noire ».

### 2.2.2 Algorithmes d'Optimisation : Globale et Locale

Lorsque nous avons un problème d'optimisation à résoudre, l'objectif principal consiste à obtenir la meilleure solution, autrement dit en cas de minimisation, obtenir le vecteur de décision réalisant la plus petite valeur de la fonction coût respectant les contraintes de notre problème : c'est la solution exacte. Sauf que le comportement et les complexités des fonctions objectif et contraintes peuvent rendre cet objectif (but) inatteignable. En effet, d'une part, beaucoup de problèmes d'optimisation de la réalité physique et/ou même théoriques ont des fonctions coûts qui sont définis implicitement ce qui ne permet pas une analyse rigoureuse de leur comportement et leurs régularité. D'autre part, ces fonctions coûts peuvent avoir plusieurs minima (ou maxima) locaux qui sont en général des bassins d'attraction pour les algorithmes d'optimisation numérique.

**Définition 2.1** (*Minimum Global*) Soit  $x_{OG}$  un élément de  $\mathbb{R}^n$  ; On dit que  $x_{OG}$  est une solution globale ou simplement minimum global de  $(\mathbb{P}_{\text{cont}})$  si et seulement si son image  $f(x_{OG})$  est la plus petite valeur de  $f$  sur l'ensemble  $\mathcal{E}_{\text{adm}}$ . On écrit formellement :

$$x_{OG} \text{ est un minimum global de } (\mathbb{P}_{\text{cont}}) \iff \forall x \in \mathcal{E}_{\text{adm}}, f(x_{OG}) \leq f(x). \quad (2.4)$$

**Définition 2.2** (*Minimum Local*) Soit  $x_{OL}$  un élément de  $\mathbb{R}^n$  ; On dit que  $x_{OL}$  est une solution locale ou simplement minimum local de  $(\mathbb{P}_{\text{cont}})$  si et seulement s'il existe un voisinage de  $x_{OL}$  tel que  $x_{OL}$  soit un optimum global de la restriction de  $(\mathbb{P}_{\text{cont}})$  à ce voisinage. On écrit formellement :

$$\begin{aligned} x_{OL} \text{ est un minimum local de } (\mathbb{P}_{\text{cont}}) \\ \iff \\ \exists \mathcal{V}^* \in V(x_{OL}) / \forall x \in \mathcal{V}^* \cap \mathcal{E}_{\text{adm}}, f(x_{OL}) \leq f(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

---

4. Au sens de la difficulté d'obtenir la dérivée de manière classique.

Il s'ensuit de la Définition 2.2 que tout minimum global est minimum local (il suffit de prendre  $\mathcal{V}^* = \mathbb{R}^n$ ). Le graphe de la Figure 2.1 montre une illustration représentative de ces extrema (local et global).

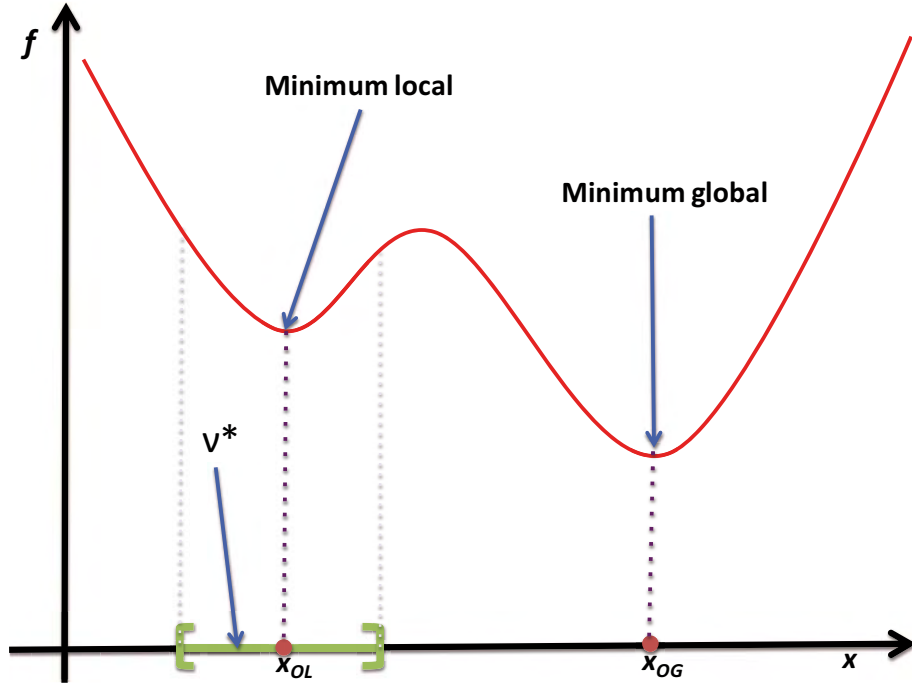


FIGURE 2.1 – Représentation graphique d'une fonction présentant un minimum local  $x_{OL}$  et un minimum global  $x_{OG}$ .  $\mathcal{V}^*$  est un voisinage de  $x_{OL}$  sur lequel ce point est optimal global.

En Optimisation, un algorithme est un ensemble des méthodes, procédures et techniques élaborées pour *calculer* ou *approcher* la solution d'un problème. Les algorithmes permettent aussi de classer les problèmes d'optimisation : ainsi, on parlera d'*optimisation locale* (resp. *optimisation globale*) si l'algorithme utilisé pour la résolution du problème permet d'obtenir un minimum local (resp. global).

Les algorithmes d'optimisation locale sont principalement déterministes, itératifs et de type gradient ou dit de descente<sup>5</sup> qui utilisent la dérivée première et seconde (si possible) pour trouver la direction permettant de diminuer les valeurs du critère à partir d'un point initial, afin d'obtenir une solution approximative. En général, ces algorithmes sont efficaces sur des problèmes assez réguliers. La solution optimale est cherchée parmi les points critiques de la fonction objectif, c'est-à-dire les points solutions de l'équation  $\nabla f(x) = 0$  (dite équation d'Euler ou Condition Nécessaire d'Optimalité du Premier Ordre) [48].

En optimisation globale, les méthodes sont dites optimales (car elles retrouvent la meilleure solution en général) et les algorithmes utilisés n'ont pas besoin a priori de la dérivée, ce qui explique en partie leur efficacité en optimisation non différentiable (surtout en cas de discontinuité des fonctions du problème). Ils sont plutôt

5. La direction de la plus grande descente correspond à l'opposée de celle du gradient de la fonction objectif dans le cas de minimisation.



basés sur un nombre élevé d'évaluation de la fonction coût sur un grand nombre de points du domaine (admissible) du problème. Ensuite, le principe de base est d'ordonner la distribution des valeurs de la fonctionnelle à minimiser, puis de récupérer les variables de contrôle réalisant la valeur minimale. Ces algorithmes sont en général de type séparation-évaluation (communément connu sous l'appellation anglaise Branch and Bound (B&B)), multi-start (qui consiste à résoudre avec un nombre assez important de point à l'aide d'algorithme d'optimisation local typiquement de descente et choisir la meilleure solution selon le problème de minimisation considéré), évolutionnistes (tels que les algorithmes génétiques, les colonies de fourmis, le recuit simulé, . . .) [49, 50].

Bien que de plus en plus sophistiqués de nos jours, les algorithmes d'optimisation globale nécessitent beaucoup de temps de calcul et d'espace mémoire lors de l'optimisation numérique. Cela rend quasi-impossible l'utilisation des algorithmes d'optimisation globale sur des problèmes de grandes tailles. De plus, hormis les problèmes d'optimisation linéaire, quadratique et convexe en toute généralité, il est très difficile de prouver l'existence d'optima globaux.

## 2.3 Optimisation Structurale

L'optimisation des structures tire ses origines des problèmes purement mécanique du génie civil, où elle fut développée pour la conception optimale des poutres (de bâtiments, de ponts, . . .) soumis à des charges. Les méthodes d'optimisation structurale peuvent être réparties en 3 grandes classes, comme suit :

### 2.3.1 Optimisation de Dimensionnement

L'optimisation de dimensionnement/paramétrique consiste à trouver les longueurs optimales, l'épaisseur optimale, le diamètre optimal d'une section transversale d'un objet considéré. Cette classe d'optimisation est utilisée en particulier pour optimiser le nombre des membres d'une structure en treillis. Dans ce cas, elle permet d'éliminer les membres inutiles de la structure, voir la Figure 2.2. L'optimisation de dimensionnement est par exemple utilisée dans l'industrie d'automobile pour optimiser les épaisseurs des tôles des carrosseries pour obtenir des véhicules plus légers.

### 2.3.2 Optimisation de Forme

L'optimisation de forme/géométrique consiste à trouver la géométrie spatiale optimale d'un objet en faisant varier ses frontières. Ces variations de frontières ne doivent pas modifier la connexité initiale; c'est-à-dire que les formes initiales et optimales de la structure doivent avoir le même nombre de trous, voir la Figure 2.3. Cette contrainte de connexité réduit fortement la classe des solutions réalisables. Chez les aviateurs, selon le type d'appareil l'allure où la forme de base des ailes est souvent donnée, l'optimisation géométrique permet par exemple d'avoir des ailes plus ou moins plates/étirées respectant un certain aérodynamisme

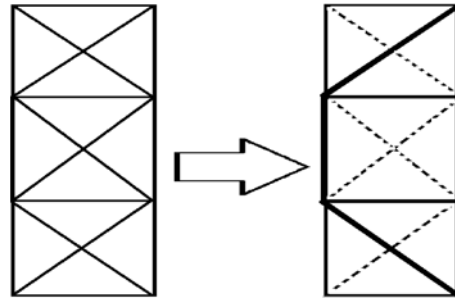


FIGURE 2.2 – Optimisation de dimensionnement. Le design optimal comporte des membres dont certains ont été supprimés, ceux qui sont en pointillés : (à gauche) design initial, (à droite) design optimal.

afin de minimiser la trainée exercée sur le véhicule. En optimisation de forme, le suivi de l'évolution des frontières s'effectue grâce à l'utilisation des fonctions homéomorphismes pour paramétrer le domaine de conception. Ces homéomorphismes permettent de capturer des domaines à topologie équivalente au cours du processus d'optimisation numérique.

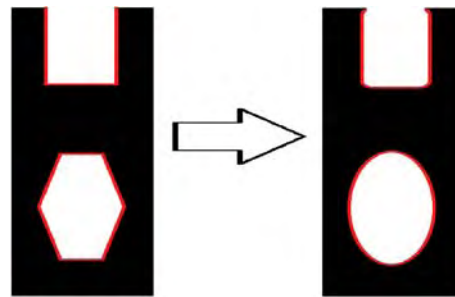


FIGURE 2.3 – Optimisation de forme géométrique. Les frontières en rouge sont celles qui sont variables : (à gauche) design initial, (à droite) design optimal.

### 2.3.3 Optimisation Topologique

L'optimisation topologique étudie à la fois la géométrie des objets et la façon dont les parties d'un objet sont connectées les unes aux autres. Il s'ensuit que l'optimisation topologique des structures consiste à chercher dans toutes les directions sans restriction explicite ou implicite, la meilleure répartition des matériaux constitutifs et la meilleure forme d'un objet. En général, cette classe d'optimisation structurale est la plus flexible et génère des designs optimaux qui n'ont pas d'équivalence topologique avec les designs initiaux correspondants, voir la Figure 2.4. Dans tous les domaines d'application l'optimisation topologique permet d'obtenir des solutions très innovantes qu'un designer (aussi expérimenté soit-il) ne saurait faire intuitivement.

Dans cette thèse, on travaillera principalement sur l'optimisation topologique notamment car elle est beaucoup plus générale. De plus, cette méthode est capable de nous fournir des formes ou des dimensions optimales des structures à concevoir.

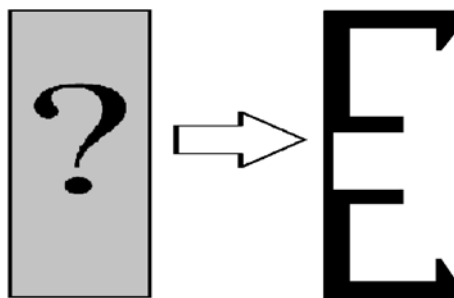


FIGURE 2.4 – Optimisation de forme Topologique : (à gauche) design initial avec une distribution quelconque et homogène de matériaux, (à droite) design optimal présentant deux parties distinctes, une zone blanche qui désigne le trou (ou vide) et une zone en noir pour les points matériels.

C'est pourquoi, elle est aussi connue sous le nom d'optimisation de forme généralisée [53]. De plus, étant donné que la topologie du domaine de conception change au cours du processus d'optimisation, le choix d'un point de départ en optimisation topologique n'est pas aussi crucial qu'en optimisation de forme ou en optimisation de dimensionnement (paramétrique).

Enfin, les conceptions basées sur l'optimisation topologique offrent un gain énorme en temps dans le processus de développement et une réduction considérable du poids des pièces conçues (en général). Par exemple, en mécanique, pour des problèmes courants de conception, on peut estimer que les gains moyens de performances vont, en optimisation de dimensionnement, de 5 à 10% et, en optimisation de forme avec une topologie fixée, de 10 à 30%. Avec l'optimisation topologique, on pense que les gains générés peuvent aller de 40 à 100% sur le critère de performance (Duysinx, 1995-1996) [54]. Ainsi, en pratique dans la conception de structures électromagnétiques, on peut penser que l'optimisation topologique nous permettra d'aller au delà des solutions empiriques basées sur l'intuition et l'expérience des ingénieurs.

L'optimisation topologique requiert des outils d'analyse mathématiques spécifiques notamment les espaces fonctionnels et les opérateurs différentiels. Dans les paragraphes suivants sont brièvement rappelées ces quelques notions fondamentales.

## 2.4 Outils d'Analyse : Espaces Fonctionnels et Opérateurs Différentiels

L'analyse fonctionnelle traite des caractéristiques comportementales des objets représentatifs de la réalité physique et des phénomènes qui nous entourent. Elle offre les outils abstraits nécessaires pour définir, expliquer et justifier de manière rationnelle et rigoureuse les lois qui régissent les phénomènes physiques, dont pour ce qui nous intéressera, les phénomènes d'électromagnétisme.

Dans cette section, on considérera un domaine  $\Omega$ , une partie non vide et borné de

$\mathbb{R}^n$  et de frontière  $\partial\Omega$ .

### 2.4.1 Définitions et Rappels

**Définition 2.3** La frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  est continue (resp. Lipschitz<sup>6</sup> de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ ) si pour tout point  $x$  de  $\partial\Omega$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}_x$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un nouveau système orthogonal de coordonnées  $y = (y', y_n)$ , avec  $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$  tels que :

a)  $\mathcal{O}_x$  est un hypercube dans le nouveau repère orthogonal :

$$\mathcal{O}_x = \{y; -a_i < y_i < a_i, \quad i = 1, \dots, n\},$$

b) il existe une fonction  $\phi$  continue (resp. Lipschitz de classe  $\mathcal{C}^k$ ), définie sur

$$\mathcal{O}' = \{y; -a_i < y_i < a_i, \quad i = 1, \dots, n-1\},$$

et satisfaisant :

$$|\phi(y')| \leq a_n/2, \quad \forall y' \in \mathcal{O}',$$

$$\Omega \cap \mathcal{O}_x = \{y; y_n < \phi(y')\},$$

$$\partial\Omega \cap \mathcal{O}_x = \{y; y_n = \phi(y')\}.$$

En d'autres termes, dans un voisinage du point  $x \in \partial\Omega$ , l'ensemble  $\Omega$  est en dessous du graphe de  $\phi$  et  $\partial\Omega$  est le graphe de  $\phi$ . Par conséquent, si  $\Omega$  est un ouvert avec sa frontière  $\partial\Omega$  Lipschitzienne : alors,  $\Omega$  est d'un seul côté de  $\partial\Omega$  autour de tout point de  $\partial\Omega$  (voir une illustration sur la Figure 2.5).

**Définition 2.4** Le domaine  $\Omega$  est dit continu (resp. Lipschitz de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ ) si sa frontière  $\partial\Omega$  est continue (resp. Lipschitz de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ ).

**Remarque 2.1** Sur la régularité du domaine

- Cette notion de régularité sur le domaine est particulièrement importante dans l'étude des EDPs. Des définitions 2.3 et 2.4, on en déduit que les domaines ayant un point de rebroussement ou une fissure sont irréguliers, voir la Figure 2.5(b).
- Les domaines présentant des coins droits comme les rectangles sont considérés comme réguliers, voir la Figure 2.5(a). De manière générale, si  $\Omega$  est un ouvert convexe borné, alors il est fortement Lipschitzien, une preuve se trouve dans [55]. En particulier, dans nos applications numérique pour le design des circuits magnétiques, nous utiliserons des domaines rectangulaires.

D'autres types de domaines irréguliers sont donnés dans [56] et des détails supplémentaires se trouvent dans les manuels de géométrie différentielle.

**Définition 2.5 (Espace des fonctions tests)** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (c'est-à-dire continûment et infiniment dérivable) à support compact dans  $\Omega$  est noté  $\mathcal{D}(\Omega)$ , c'est l'espace des fonctions tests.

---

6. Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (14 Mai 1832 - 7 Octobre 1903) : mathématicien Allemand.

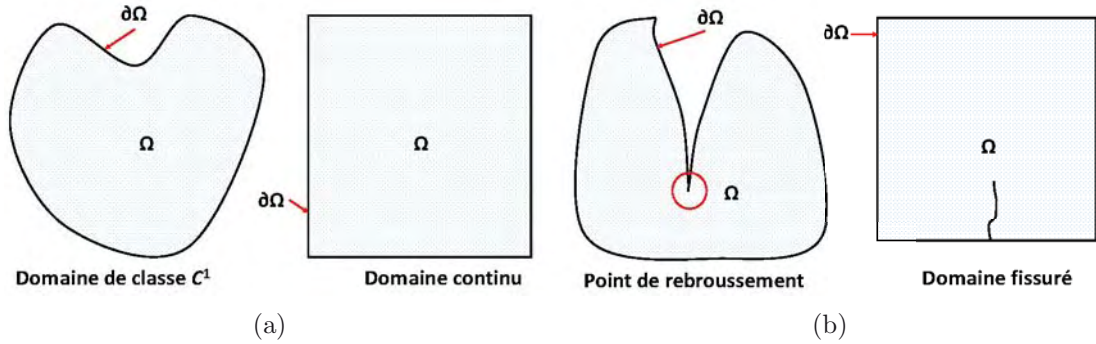


FIGURE 2.5 – a) Domaine régulier dont celui de droite simplement continu et Lipschitzien, et celui de gauche de Classe 1 ; b) Domaine irrégulier présentant des singularités.

L'espace fonctionnel  $\mathcal{D}(\Omega)$  est fondamental en analyse notamment en théorie des distributions et pour la résolution des EDPs. Il possède des propriétés topologiques très intéressantes et essentielles pour beaucoup de preuves analytiques. De plus, il est dense dans la plupart des espaces fonctionnels typiquement ceux de Lebesgue<sup>7</sup> et de Sobolev<sup>8</sup>. On utilise ses éléments pour approcher beaucoup de variétés de fonctions (exemple : les fonctions localement intégrables) sans problème lié à la régularité.

### 2.4.2 Espaces de Lebesgue et Espaces de Sobolev

En plus de l'espace des fonctions tests  $\mathcal{D}(\Omega)$ , en analyse fonctionnelle, on a les *espaces de Lebesgue* et les *espaces de Sobolev* qui furent développés avec la théorie des mesures, la théorie des intégrales et la théorie des EDPs.

1. Les espaces de Lebesgue sont les espaces vectoriels fonctionnels, noté par  $\mathbf{L}^p(\Omega)$ , pour  $p \in [1, +\infty[$  et définis par :

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable ; } \int_{\Omega} |u|^p d\Omega < \infty \right\}. \quad (2.6)$$

Les espaces de Lebesgue munis de la norme ,

$$\|u\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |u|^p d\Omega \right\}^{\frac{1}{p}}, \forall u \in \mathbf{L}^p(\Omega), \quad (2.7)$$

7. Henri-Léon Lebesgue (28 Juin 1875 - 26 Juillet 1941) : mathématicien Français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée initialement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à l'université de Nancy en 1902.

8. Sergueï Lvovitch Sobolev (6 Octobre 1908 - 3 Janvier 1989) : mathématicien et physicien atomique Russe. Il fut le premier à introduire la notion de fonctions généralités et une version abstraite de la notion classique de différentiation dans les années 1935 (connues sous le nom des distributions).

sont des espaces de Banach<sup>9</sup>.

2. Les espaces de Sobolev sont les espaces vectoriels, notés  $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ , pour  $p \in [1, +\infty[$  et  $m \in \mathbb{N}$  et définis par :

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathbf{L}^p(\Omega); \partial^\alpha u \in \mathbf{L}^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m, \}, \quad (2.8)$$

avec  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  un multi-indice de  $\mathbb{N}^n$  de module  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , et la quantité différentielle partielle  $\partial^\alpha u$  (en général au sens des distributions) définie par :

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (2.9)$$

Les espaces de Sobolev sont des extensions aux dérivées partielles des fonctions des espaces  $\mathbf{L}^p(\Omega)$ . Ces espaces sont aussi des espaces de Banach pour la norme suivante :

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega). \quad (2.10)$$

Lorsque  $p = 2$ , l'espace de Sobolev  $\mathbf{W}^{m,2}(\Omega)$  est généralement noté par  $\mathbf{H}^m(\Omega)$ . Dans ce cas, l'espace  $\mathbf{H}^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert<sup>10</sup> pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbf{H}^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \cdot \partial^\alpha v d\Omega, \quad \forall u, v \in \mathbf{H}^m(\Omega). \quad (2.11)$$

En particulier, l'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , aussi appelé l'espace des fonctions à énergie finie est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire ci-dessous :

$$\langle u, v \rangle_2 = \int_{\Omega} u \cdot v d\Omega, \quad \forall u, v \in \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (2.12)$$

Ce produit scalaire (2.12) et sa norme induite (voir (2.7)) seront notés par la suite sans indice.

Nous allons principalement utiliser les espaces  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  pour les calculs intégraux. Des analyses beaucoup plus élaborées sur ces espaces fonctionnels se trouvent dans les travaux de R. Adams [57], de C. Zuily [58], et de H. Brezis [59, 60].

### 2.4.3 Opérateurs Différentiels

Les principaux opérateurs différentiels de l'analyse vectorielle sont du premier ordre à savoir l'opérateur *gradient*, l'opérateur *divergence* et l'opérateur *rotationnel*.

9. Stefan Banach (1892-1945) est un mathématicien Polonais. Ses travaux ont surtout porté sur l'analyse fonctionnelle dont il est l'un des fondateurs.

10. David Hilbert (23 Janvier 1862 - 14 Février 1943) : mathématicien Allemand. Lors du deuxième congrès international des mathématiciens, tenu à Paris en 1900, il présenta une liste de 23 problèmes (appelé par la suite « problèmes de Hilbert ») qui tenaient jusqu'alors les mathématiciens en échec.

### 2.4.3.1 Opérateur Gradient

**Définition 2.6** Soit  $f \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , le **gradient** de  $f$  noté  $\mathbf{grad}(f)$  est le vecteur définie par :

$$\mathbf{grad}(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T. \quad (2.13)$$

Dans la littérature différentes notations<sup>11</sup> sont employées, dont les plus courantes sont :  $\nabla(f)$ ,  $\vec{\nabla}(f)$ ,  $\vec{\text{grad}}(f)$ . A l'opérateur gradient, on associe l'espace :

$$\mathbf{H}(\mathbf{grad}; \Omega) = \{f \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{grad}(f) \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^n\}. \quad (2.14)$$

Sur  $\mathbf{H}(\mathbf{grad}; \Omega)$ , on définit le produit scalaire,

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{H}(\mathbf{grad}; \Omega)} = \int_{\Omega} f \cdot g d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{grad}(f) \cdot \mathbf{grad}(g) d\Omega, \quad \forall f, g \in \mathbf{H}(\mathbf{grad}; \Omega), \quad (2.15)$$

la norme induite est,

$$\|f\|_{\mathbf{H}(\mathbf{grad}; \Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} |f|^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\mathbf{grad}(f)|^2 d\Omega}, \quad \forall f \in \mathbf{H}(\mathbf{grad}; \Omega). \quad (2.16)$$

Ainsi, l'espace vectoriel  $(\mathbf{H}(\mathbf{grad}; \Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}(\mathbf{grad}; \Omega)})$  est un espace de Hilbert. On remarque aussi que cet espace coïncide exactement avec l'espace de Sobolev  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , ce qui restreint un peu son usage dans les calculs.

### 2.4.3.2 Opérateur Divergence

**Définition 2.7** Soit la fonction vectorielle  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n$ , la **divergence** de  $\mathbf{f}$  noté  $\text{div}(\mathbf{f})$  est le champ scalaire défini par :

$$\text{div}(\mathbf{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}. \quad (2.17)$$

Elle est couramment notée par  $\nabla \cdot (\mathbf{f})$ .

On associe à l'opérateur divergence l'espace vectoriel,

$$\mathbf{H}(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)^n \mid \text{div}(\mathbf{f}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}. \quad (2.18)$$

Sur  $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ , on définit le produit scalaire,

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{f}) \cdot \text{div}(\mathbf{g}) d\Omega, \quad \forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega), \quad (2.19)$$

---

11. Les notations munies de flèches en dessus sont généralement faite pour préciser la nature vectorielle des opérateurs. Dans ce mémoire, on préférera utiliser la mention sans flèche.

la norme induite est,

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \|\mathbf{f}\|^2 d\Omega + \int_{\Omega} (\text{div}(\mathbf{f}))^2 d\Omega}, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\text{div};\Omega). \quad (2.20)$$

Ainsi, l'espace vectoriel  $(\mathbf{H}(\text{div};\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega)})$  est un espace de Hilbert.

**Remarque 2.2** *Par définition, cet espace contient l'espace de Sobolev  $\mathbf{H}^1(\Omega)^n$ .*

### 2.4.3.3 Opérateur Rotationnel

Dans cette sous-section,  $\Omega$  est une partie de  $\mathbb{R}^3$  ou de  $\mathbb{R}^2$  (on précisera si nécessaire selon ces deux cas).

**Définition 2.8** *Soit la fonction vectorielle  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^3$ , le **rotationnel** de  $\mathbf{f}$  noté  $\text{rot}(\mathbf{f})$  est le vecteur défini par :*

$$\text{rot}(\mathbf{f}) = \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right). \quad (2.21)$$

Le rotationnel est une quantité tensorielle tridimensionnelle. Il caractérise le mouvement de rotation local d'un champ de vecteur dans l'espace physique ; c'est-à-dire en 3D. Selon les auteurs et les domaines d'application, on trouve différentes notations de cet opérateur telles que :  $\nabla \times (\mathbf{f})$ ,  $\text{rot}(\mathbf{f})$ ,  $\vec{\nabla} \times (\mathbf{f})$ ,  $\vec{\text{rot}}(\mathbf{f})$ .

Au rotationnel, on associe l'espace vectoriel suivant,

$$\mathbf{H}(\text{rot};\Omega) = \{ \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)^3 \mid \text{rot}(\mathbf{f}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)^3 \}. \quad (2.22)$$

Sur  $\mathbf{H}(\text{rot};\Omega)$ , on définit le produit scalaire,

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{H}(\text{rot};\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Omega} \text{rot}(\mathbf{f}) \cdot \text{rot}(\mathbf{g}) d\Omega, \quad \forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{H}(\text{rot};\Omega), \quad (2.23)$$

sa norme induite est,

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}(\text{rot};\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \|\mathbf{f}\|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \|\text{rot}(\mathbf{f})\|^2 d\Omega}, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\text{rot};\Omega). \quad (2.24)$$

Ainsi, l'espace vectoriel  $(\mathbf{H}(\text{rot};\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}(\text{rot};\Omega)})$  est un espace de Hilbert.

### 2.4.3.4 Cas de la Dimension 2

Dans certains problèmes physiques, on peut avoir à étudier des objets ayant un axe et/ou un plan de symétrie ou des objets invariants selon une ou plusieurs directions. Dans ces cas, au lieu de considérer toutes les directions de l'espace, il apparaît avantageux d'analyser ces problèmes par rapport aux direction présentant des variations importantes. Ceci est utile en électromagnétisme car cela



permet de réduire les complexités des problèmes en terme de calculs analytiques et de résolution numérique. Les définitions des opérateurs différentiels s'étendent facilement à toutes les dimensions excepté l'opérateur  $\text{rot}(\cdot)$  qui est plutôt spécifique à la dimension 3. Afin de le manipuler aisément par exemple en dimension 2 (en magnétostatique, beaucoup de systèmes peuvent se ramener en 2D et le plus souvent le champ magnétique est contenu dans un plan), il est impératif d'adopter les définitions, suivantes :

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,

1. Cas des fonctions scalaires : soit  $\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , dans la définition 2.8, en prenant  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) = (0, 0, \phi)$ , on obtient :

$$\text{rot}(\mathbf{f}) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, 0 \right). \quad (2.25)$$

Par la suite, avec l'isomorphisme suivant,

$$\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (2.26)$$

on peut alors définir l'opérateur rotationnel pour les fonctions définies sur une partie de  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs scalaires par :

$$\mathbf{rot}(\varphi) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right), \forall \varphi. \quad (2.27)$$

2. Cas des fonctions bidimensionnelles : soit  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^2$ , avec la définition 2.8, pour la fonction construite  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) = (\mathbf{v}, 0) = (v_1, v_2, 0)$ , on a :

$$\text{rot}(\mathbf{f}) = \left( 0, 0, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \quad (2.28)$$

Avec l'isomorphisme ci-dessous :

$$\{0\} \times \{0\} \times \mathbf{L}^2(\Omega) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (2.29)$$

on peut alors définir l'opérateur rotationnel pour les fonctions vectorielles 2D définies sur une partie de  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\text{rot}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, \forall \boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2). \quad (2.30)$$

Ces études distinctes ont permis de mettre en évidence les difficultés que l'on peut rencontrer lorsque l'on utilise le rotationnel surtout en 2D. Dans les expressions (2.27) et (2.30), on a noté en « **gras** » et « normale » les formulations équivalentes *vectorielle* et *scalaire* respectivement. Par la suite, on gardera cette convention de notation. Dans ce cas les espaces de Hilbert dédiés deviennent :

- Cas vectoriel,

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) = \left\{ f \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{rot}(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_2}, -\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \in \mathbf{L}^2(\Omega)^2 \right\}. \quad (2.31)$$

- Cas scalaire,

$$\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) = \left\{ \mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega)^2 \mid \text{rot}(\mathbf{f}) = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}. \quad (2.32)$$

**Remarques 2.3** (Sur le rotationnel<sup>12</sup>)

- L'espace  $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$  est égal à l'espace de sobolev  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ . En effet ce sont des espaces vectoriels, et en comparant les définitions (2.31) et (2.33) le résultat s'ensuit.

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ v \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}. \quad (2.33)$$

- Il est possible d'étendre la définition de l'opérateur rotationnel à des dimensions au-delà de 3, en utilisant les produits tensoriels.

## 2.5 Description et Mise en Place de Modèles de Simulations

### 2.5.1 Modèles 2D pour la Simulation et le Design des PEHs

La conception et l'étude d'un PEH met en parallèle le design du circuit magnétique et la génération du plasma. Ceci est dû en grande partie aux modèles physiques des plasmas dans lesquels le champ est considéré constant et non modifié par le courant de Hall généré. Les modèles du plasma s'appuient sur le mouvement des particules (tels que les atomes, les ions, les électrons, les neutrons) dans la chambre de décharge et dans le faisceau plasmique généré. On utilise des approches fluide et/ou particules, basées sur la résolution de l'équation de Boltzmann<sup>13</sup>, connue dans littérature sous le nom de modèle PIC (Particle-In-Cell). Au modèle PIC on associe le plus souvent une méthode collisionnelle de Monte-Carlo (MCC : Monte Carlo Collision). Cela permet de prendre en compte les inter-actions plasma-parois céramique, et donc l'érosion. Le premier modèle hybride PIC-MCC a été proposé par Fife et Martinez sous l'appellation HPHall (Hybrid-PIC Hall) [61]. Récemment beaucoup d'autres codes de simulation hybride PIC (Hybride PIC : ions+ fluide d'électrons) pour moteurs plasmiques ont aussi été proposés notamment des versions améliorées du HPHall incluant l'intégration de phénomènes physiques influant sur la performance des moteurs ioniques [62, 63, 64].

S'agissant du design du circuit magnétique, il n'existe pas de modèles de dimensionnement, ceci malgré le rôle majeur que joue le champ magnétique dans les performances du propulseur. Comme cela a été dit dans le premier chapitre, un modèle analytique du fait de la non uniformité du champ dans le canal plasma et du taux de fuite induit par la grandeur relative de l'entre-fer (canal plasma). La

12. On a décidé de présenter un peu plus cet opérateur que les autres car il a un rôle majeur en électromagnétisme et son utilisation en 2D n'est pas immédiate.

13. Ludwig Eduard Boltzmann (20 Février 1844 - 5 Septembre 1906) : physicien et philosophe Autrichien. Il est considéré comme le père de la physique statistique et adepte des théories de l'existence des atomes.

plupart des circuits magnétiques que l'on utilise actuellement sont principalement ceux proposés par A. I. Morozov (depuis les années 1960 pour les types SPTs) et ses « dérivées » c'est-à-dire ceux obtenus à partir de ce modèle mais empiriquement (par exemple en faisant une homothétie).

Cependant, qu'il s'agisse du modèle plasma et du circuit magnétique le recours à des modèles d'étude réduits est majoritaire. L'hypothèse simplificatrice commune au modèle plasma et à la topologie magnétique concerne l'homogénéité azimutale. De ce fait, il est possible de se placer dans un domaine d'étude 2D.

Outre cette hypothèse, dans le cas spécifique de la modélisation du plasma, d'autres hypothèses complémentaires interviennent [61, 62, 63, 64, 15, 65]. Pour la conception du circuit magnétique avec un modèle réduit 2D, on admettra la géométrie axisymétrique du moteur déjà considérée par R. Vilamot dans sa thèse [2]. Dans ce passage d'une structure non symétrique à une structure axisymétrique, afin d'avoir une équivalence, il est nécessaire de remplacer les éléments non invariant par rotation autour de l'axe principal du moteur (bobines, noyaux magnétiques latéraux) par des éléments ayant cet axe comme axe de révolution, voir la Figure 2.6. De plus ample détails sur ce passage se trouve dans [2].

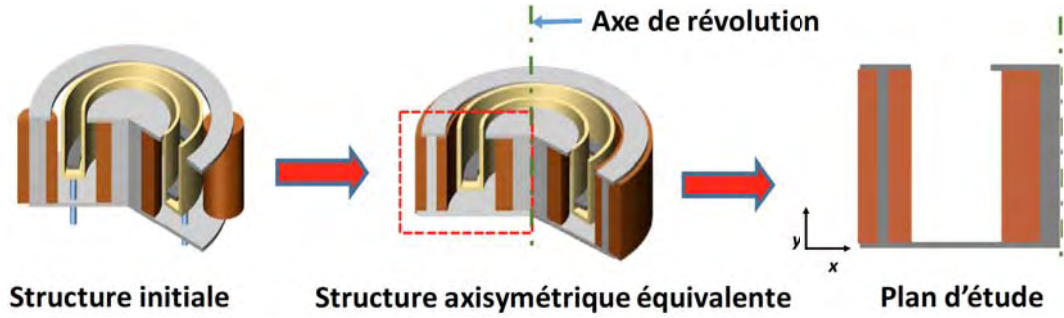


FIGURE 2.6 – Passage d'une structure quasi axisymétrique à une structure réellement axisymétrique et la section 2D correspondante (à optimiser).

Par la suite dans notre modèle, on utilisera une section plane (surfactive) du propulseur, la cartographie magnétique du flux considérée est alors celle disponible dans l'entre-fer où se loge le canal plasma. La Figure 2.7 montre un quart d'un propulseur avec sa section représentant la surface à optimiser. Il est à noter qu'une simulation 3D est souvent nécessaire en « post-processing » afin de valider l'approche et de corriger certains écarts<sup>14</sup> induits par les transformations géométriques effectuées. En particulier la résolution autour de l'axe pourra modifier le volume de la structure 3D lorsque l'on étudie la section plane dans un système de coordonnées cartésiennes au lieu d'un système de coordonnées de polaire (qui peut conserver le volume cylindrique par rotation autour de l'axe de révolution), voir les Figures 2.6 et 2.7.

**Remarque 2.4** Dans ce qui suit, on notera les vecteurs champs magnétique et électrique  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  simplement par  $B$  et  $E$  respectivement afin d'alléger les écritures.

14. Par exemples les performances théoriques du PPPS-1350 étaient supérieures à celles obtenues dans l'espace lors de la mission SMART-1.

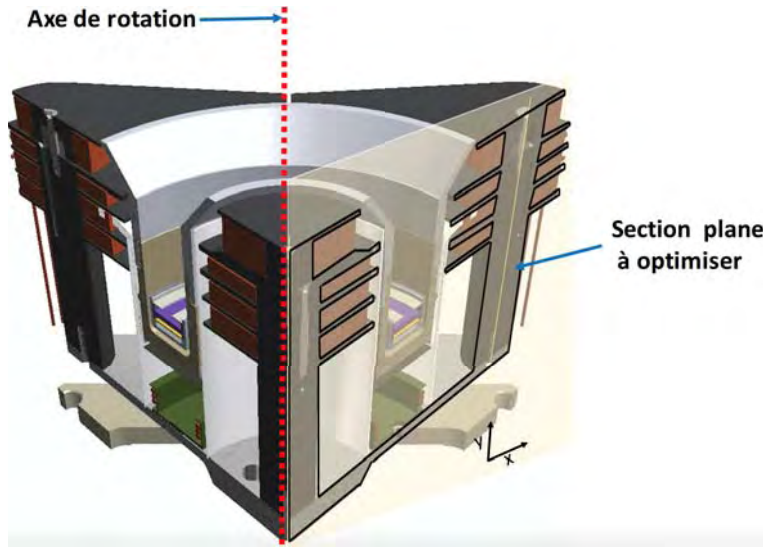


FIGURE 2.7 – Un quart du moteur ionique, utilisé pour les simulations numériques 3D avec des sections transversales, dont une surface sera optimisée.

### 2.5.2 Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques

L'électromagnétisme est l'étude des champs électromagnétiques, leurs variations temporelles et spatiales, et leur interaction sur les particules chargées électriquement. Dans le Chapitre 1, on a montré l'action du champ électromagnétique avec la dynamique des particules chargées. Dans la formulation du problème d'optimisation visant à dimensionner le circuit magnétique, il est nécessaire de répertorier les équations relatives à la physique du dispositif. En notant  $\rho_{\text{él}}$ <sup>15</sup> et  $\mathbf{J}$ , la densité de charge électrique et la densité de courant respectivement, la forme locale des équations de Maxwell dans un milieu donné est :

- L'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot}(\mathbf{E}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.34)$$

- L'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot}(\mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (2.35)$$

- L'équation de Maxwell-Gauss (magnétique) :

$$\text{div}(\mathbf{B}) = 0. \quad (2.36)$$

- L'équation de Maxwell-Gauss (électrique) :

$$\text{div}(\mathbf{D}) = \rho_{\text{él}}. \quad (2.37)$$

15.  $\rho_{\text{él}}$  est la densité de charge électrique, à ne pas confondre avec  $\rho$  dont utilisera par suite pour la densité de matériaux.

Avec :

- $\mathbf{H}$  : le vecteur induction magnétique,
- $\mathbf{D}$  : le vecteur déplacement électrique.

Pour permettre une modélisation complète des phénomènes, on introduit les lois constitutives qui caractérisent le comportement des milieux qui conduisent ces ondes électromagnétiques, ainsi que la loi d'Ohm qui lie le courant  $\mathbf{J}$  au champ  $\mathbf{E}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}. \end{cases} \quad (2.38)$$

- \*  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  est la permittivité diélectrique absolue ; avec  $\varepsilon_r$  et  $\varepsilon_0$  (sa valeur est estimée à  $1/(36\pi \times 10^9)$  F/m) la permittivité relative du milieu et la permittivité du vide respectivement.
- \*  $\mu = \mu_0 \mu_r$  est la perméabilité magnétique absolue ; avec  $\mu_0 (= 4\pi \times 10^{-7}$  H/m) et  $\mu_r$  la perméabilité relative du milieu/matériau et la perméabilité du vide respectivement.
- \*  $\sigma$  est la conductivité électrique du matériau.

Les équations (2.34) - (2.38) peuvent être non-linéaires ou anisotropes. Dans ce cas, les paramètres caractéristiques  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des quantités tensorielles [66, 67]. Dans ces travaux, on se placera principalement dans le cas des milieux linéaires et isotropes pour les simulations numériques. Il est possible de modéliser le problème de conception des PEHs en utilisant les matériaux ferromagnétiques non saturés car en pratique le champ magnétique requis par ces moteurs plasmiques est de quelques centaines de Gauss.

On travaillera aussi en *régime permanent*<sup>16</sup> qui sont des régimes où les variations temporelles des termes sources du champ sont nulles. En effet, dans ces régimes aussi dits statiques, on obtient un découplage des phénomènes électriques caractérisés par les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  ayant pour source la densité de charge  $\rho_{el}$ , et pour source magnétique des champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  la densité de courant  $\mathbf{J}$ , tout ceci est donné par les équations de Maxwell [67, 68]. Ainsi, on pourra faire uniquement de manière séparée une approche électrostatique ou une approche magnétostatique du problème étudié. En ce qui concerne le développement architectural des propulseurs de Hall, le phénomène prépondérant est le *magnétisme*.

### 2.5.2.1 Cas de la Magnétostatique

En magnétostatique, les termes comportant une dérivation par rapport au temps sont négligés. Les équations étudiées dans ce cas sont les suivantes :

$$\text{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}, \quad \text{div}(\mathbf{B}) = 0, \quad \text{et } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (2.39)$$

---

16. Cela est une des caractéristiques principales des moteurs plasmiques étudiés dans mes travaux, c'est ainsi qu'ils sont aussi appelés PPS (Propulseur à Plasma Stationnaire).

Pour mener à bien le calcul des grandeurs magnétiques, on introduit le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . L'existence d'un tel potentiel est justifié par l'équation de Maxwell (2.36) et par la topologie du domaine considéré. Par ailleurs, si le domaine est connexe, et que le champ magnétique est nul<sup>17</sup> au niveau des frontières avec la relation (2.36), on démontre l'existence d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  vérifiant  $\text{rot}(\mathbf{A})=\mathbf{B}$ , voir [69]. En ce qui concerne son unicité, physiquement on peut ajouter une condition de jauge telle que la jauge de Coulomb ( $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$ ), ou on peut aussi ajouter une condition aux limites sur  $\mathbf{A}$ . Sans perte de généralité, on ajoutera une condition aux limites de type Dirichlet homogène sur le potentiel vecteur, voir la Figure 2.10. Ce choix se justifie en pratique, par le désir d'imposer des champs nuls à l'infini.

### 2.5.2.2 Utilisation des Aimants Permanents

Dans notre modèle, nous pouvons être amenés à introduire les aimants permanents pour 2 raisons. D'une part l'utilisation des aimants permanents peut contribuer à réduire significativement le volume et la masse du circuit magnétique. D'autre part, l'analyse de la sensibilité de notre modèle d'optimisation se fera par l'utilisation de la Méthode dite de la Variable Adjointe (MVA), et cela nécessitera l'introduction d'un nouveau système (dit état adjoint) dont la source d'énergie provient d'un pseudo-aimant. Ce qui donne un sens fondamental (au moins théorique) à la prise en compte d'aimants permanents dans notre modèle d'étude. Par ailleurs, en ce qui concerne l'application physique pour les PEHs, des travaux récents sur le design des propulseurs suggèrent déjà de remplacer en partie ou entièrement les électroaimants par des aimants permanents [70, 71, 72].

L'aimant permanent est caractérisé par une aimantation noté  $\mathbf{M}$  et défini par le moment magnétique par unité de volume du matériau. Cette aimantation  $\mathbf{M}$  est liée au champ magnétique  $\mathbf{H}$  par la *susceptibilité magnétique*<sup>18</sup>  $\chi$  à travers la relation  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ . Finalement, avec les conventions de Sommerfeld<sup>19</sup> et de Kennelly [66, 73, 74], on obtient la relation constitutive qui lie les champs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  comme suit :

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.40)$$

Dans un milieu aimanté, ces quantités vectorielles magnétiques sont orientées différemment. Une illustration graphique de leur orientation en un point  $\mathbf{P}$  d'un milieu magnétisé par un aimant est donné sur la Figure 2.8 (voir [74]).

En tirant l'intensité du champ magnétique  $\mathbf{H}$  dans l'équation (2.40) et en le remplaçant dans l'équation de Maxwell-Ampère (cas statique), on obtient :

$$\text{rot}(\nu\mathbf{B} - \mathbf{M}) = \mathbf{J}, \quad (2.41)$$

17. Dans notre cas, cette condition est vérifiée car on impose une topographie de champ magnétique nulle dans les voisinages lointains du véhicule spatial (sinon il y a fort risque de problèmes de compatibilité magnétique avec d'autres composantes électromagnétique de la navette spatiale ou de problèmes d'interférence avec d'autres objets fortement magnétisés dans l'espace tels que les débris d'autres engins spatiaux).

18. C'est l'équivalent de la perméabilité magnétique. En effet, on a :  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ .

19. Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (5 Décembre 1868 - 26 Avril 1951) : physicien théoricien Allemand.



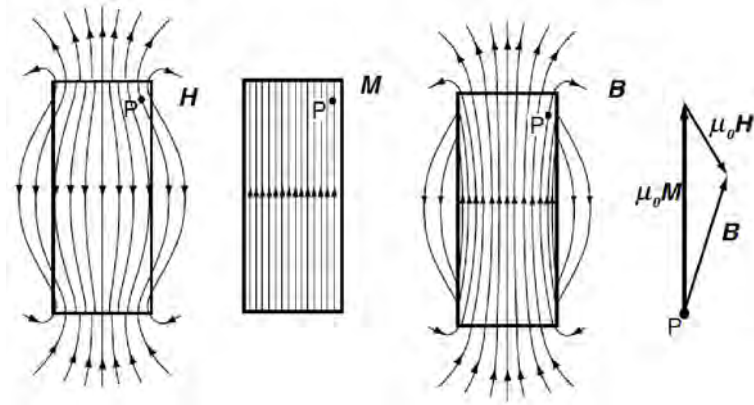


FIGURE 2.8 – Représentation des vecteurs champs du champ  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  pour un milieu magnétisé uniformément par un aimant permanent.

où :  $\nu = \frac{1}{\mu}$  est la *réductivité magnétique*.

Compte tenu de la linéarité des opérateurs différentiels, en développant l'expression à gauche de la relation (2.41), on exprime  $\text{rot}(\mathbf{M})$ , que l'on posera égal à  $\mathbf{J}_M$ . Cette quantité  $\mathbf{J}_M$  est un courant de magnétisation Ampérien caractéristique du milieu magnétisé [74], aussi appelé courant de polarisation magnétique.  $\mathbf{J}_M$  désigne le courant contributif de l'aimant, source naturelle du champ magnétique.

### 2.5.2.3 Réduction à la Dimension 2 des Champs Magnétostatiques

La conséquence naturelle du passage des géométries complexes aux géométries classiques (ayant des symétries et des directions d'invariance) est la réduction des variations majeures dans certaines composantes des champs magnétiques, rendant relativement simple leur détermination. Ainsi, ce paragraphe complète celui de la sous-section 2.5.1, pour la considération 2D des champs dans un repère associé à la section plane considérée. On choisira un repère cartésien<sup>20</sup>  $(x, y)$ , voir les figures 2.6 et 2.7.

Dans la réalité physique, la considération 2D des équations de Maxwell correspond à la situation où le champ électromagnétique est invariant par translation dans la direction  $z$ . On peut aussi penser à des champs créés par des particules chargées qui se déplacent seulement dans des plans parallèles  $(x, y)$ . En ce qui concerne la configuration magnétique des PEHs, on aura le vecteur champ  $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y)$  principalement radial donc très important dans la direction  $(x)$ , le vecteur champ électrique  $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y)$  essentiellement axial ; c'est-à-dire important dans la direction  $(y)$  notamment dans l'entre-fer. Dans ce cas, on a les équivalences suivantes :

\* pour la densité de courant :

$$\mathbf{J} = (0, 0, J(x, y)) \equiv J(x, y). \quad (2.42)$$

20. Dans la littérature d'autre choix de référentiel sont faits tels que  $(\theta, r)$ ,  $(r, z)$ ,  $(r, x)$ .

\* pour le potentiel vecteur :

$$\mathbf{A} = (0, 0, A(x, y)) \equiv A(x, y). \quad (2.43)$$

\* pour le champ magnétique  $\mathbf{B} = \mathbf{rot}(A)$  :

$$\mathbf{B} = \left( \frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x}, 0 \right) \equiv \left( \frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x} \right). \quad (2.44)$$

\* L'équation magnétostatique de Maxwell-Ampère (2.41) devient alors :

$$-\nabla \times [\nu \mathbf{B}(A) - \mathbf{M}] + J = 0 \quad (2.45)$$

Dans l'équation (2.45), on a :

1. associé la direction du champ magnétique  $\mathbf{B}$  à l'opérateur  $\mathbf{rot}(\cdot)$ . En effet, on travaillera dans les cas où l'existence du potentiel vecteur est toujours vérifiée.
2. noté l'opérateur  $\mathbf{rot}(\cdot)$  par  $\nabla \times (\cdot)$  pour simplifier la distinction entre le cas où l'argument de l'opérateur rotationnel est une fonction vectorielle du cas où celui-ci est une fonction scalaire.

Ainsi, on vient de donner les hypothèses et définir les bases sur lesquelles, on formulera le problème de conception comme la résolution d'un problème inverse par de l'optimisation topologique.

### 2.5.3 Problème Inverse en Magnétostatique

Les *problèmes directs* sont ceux dont les causes (ou les entrées) sont connues où les effets (ou les sorties) seront à déterminer. Pour les *problèmes inverses*, on a une connaissance des effets/sorties souhaités et le but est de trouver les causes/entrées capables de les produire. Ramené à la conception du circuit magnétique du PEH, le problème à résoudre est typiquement un problème inverse. A partir d'une topologie magnétique de champ requise dans le canal plasma (entrefer magnétique), il s'agit alors de définir la topologie et la géométrie des pièces ferromagnétiques, la disposition des bobines et les densité de courant associées.

Pour résoudre ces problèmes inverses, il existe deux approches principales : une approche empirique (par « essaie-erreur »), et une approche par optimisation mathématique. La première approche, peut-être la plus ancienne<sup>21</sup>, consiste en une résolution empirique itérative ou manuelle du problème direct (correspondant au problème inverse étudié). A chaque étape de la résolution avec cette approche, on compare les performances (ou valeurs caractéristiques) obtenues avec celles imposées, jusqu'à atteindre une approximation acceptable en se basant par exemple sur une précision fixée des calculs. Cette méthode est dite *empirique* et nécessite des connaissances assez précises et pointues en ce qui concerne le dispositif considéré. En conséquence, on peut penser que cette méthode est plutôt réservée aux ingénieurs experts dans le domaine.

---

21. L'approche empirique est la plus utilisée pour le design des circuits magnétiques des PEHs de nos jours.



Dans ces travaux, on formulera le problème de conception de circuit magnétique à l'aide d'approche d'optimisation topologique [2, 75, 76, 77]. Dans notre problème :

1. L'*objectif* est constitué de la cartographie d'un champ magnétique imposé dans l'entrefer. Si besoin, cet objectif peut aussi être constitué à partir de points situés sur l'axe du canal plasma et/ou sur le plan de sortie et dans leurs voisinages immédiats.
2. Les *contraintes* : elles sont divisées en deux catégories :
  - analytique : les équations aux dérivées partielles (EDPs) magnétostatique de Maxwell (typiquement l'équation (2.45)),
  - physique : les géométries, les dimensions, le poids/volume du moteur. Cela donne la possibilité, d'avoir un peu de contrôle sur les solutions attendues et permet d'exclure les solutions trop triviales (tel que le domaine de conception vide de matériau ou inversement un domaine de conception rempli d'un matériau).
3. Les *paramètres de conception* (variables) : la distribution des sources de champ (densités de courant) noté  $J(x, y)$  et l'aimant permanent  $\mathbf{M}(x, y)$ , et la distribution de matériaux ferromagnétiques doux de perméabilité magnétique  $\boldsymbol{\mu}(x, y)$  (valeurs données dans un repère spatial 2D). On regroupe ces quantités dans un vecteur  $\mathbf{p} (= \{J, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{M}\})$  qui sera le paramètre de contrôle du problème. En effet, notre approche est basée sur la détermination de la *distribution optimale* des matériaux dans le domaine de conception. Ces paramètres sont caractéristiques des matériaux utilisés pour le design, le principe de résolution revient donc à déterminer en chaque point du domaine considéré les valeurs des paramètres constitutifs des matériaux et sources utiliser pour la conception.
4. L'*utilisation d'une méthode d'optimisation structurale topologique* requiert la discrétisation du domaine d'étude (pour l'implémentation numérique) et la résolution des équations magnétostatiques par des logiciels de simulation par éléments finis.

Le processus global de résolution à l'aide de l'approche dite « exacte » (comparativement à celle empirique) est résumés à la Figure 2.9.

#### 2.5.4 Formulation du Problème

Soit  $\Omega$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^2$ , le domaine de conception considéré. Il est subdivisé en 3 types de sous-domaines à savoir : (i) la zone cible ou zone de mesure  $\Omega_T$ <sup>22</sup> où la topographie du champ magnétique est fixée. Cette valeur connue du champ magnétique est notée  $\mathbf{B}_0$ . En pratique, cette zone cible se caractérise par un ensemble de données regroupant les points géométriques  $\mathbf{P}(x, y)$  du domaine global  $\Omega$  qui appartiennent à  $\Omega_T$  et les composantes  $(\mathbf{B}_0x, \mathbf{B}_0y)$  du champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  associé à la topographie magnétique souhaitée (en ces points  $\mathbf{P}(x, y) \in \Omega_T$ ); (ii) les zones variables  $\Omega_v(J)$ ,  $\Omega_v(\boldsymbol{\mu})$  et  $\Omega_v(\mathbf{M})$  correspondant aux régions de  $\Omega$  où la densité de courant  $J$ , la perméabilité magnétique  $\boldsymbol{\mu}$  et l'aimant permanent  $\mathbf{M}$

22. Dans  $\Omega_T$ , l'indice T est pour le terme anglais « Target » qui signifie cible/objective.

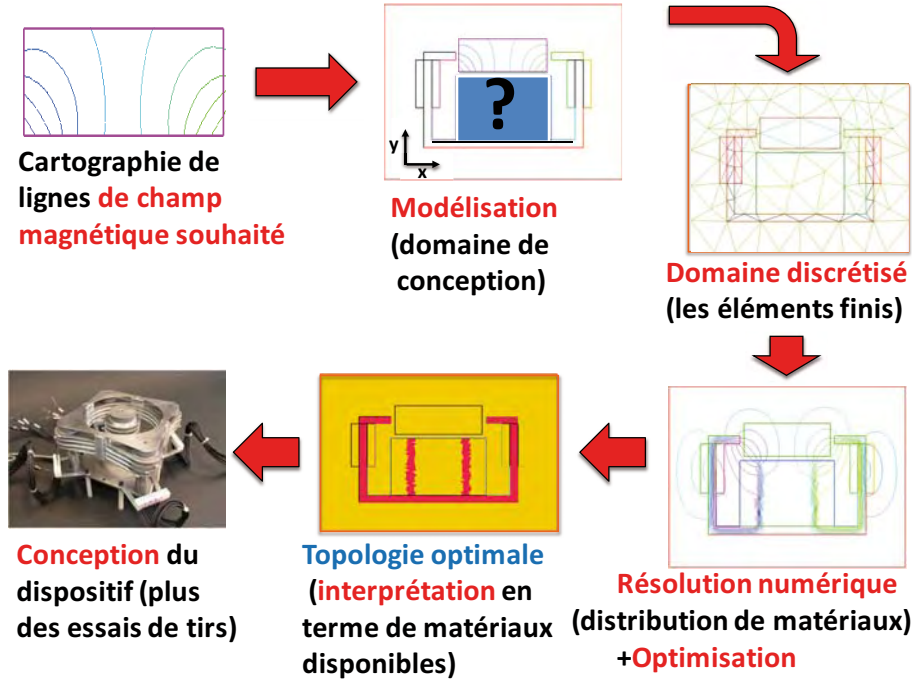


FIGURE 2.9 – Résolution méthodologique du problème inverse d'électromagnétisme pour la conception optimale de circuits magnétiques dédiées à la propulsion électriques, avec une approche d'optimisation topologique par la distribution optimale de matériaux.

sont variables. Comme le paramètre de conception  $\mathbf{p}$ , l'union des zones variables forment la zone variable totale  $\Omega_v$  ; (iii) les zones prédéfinies géométriquement et dont la composition en terme de matériau et de source reste inchangée au cours du processus de conception (c'est-à-dire que ces zones sont topologiquement fixes). Ces différents sous-domaines sont représentés sur la Figure 2.10.

Enfin, sur le potentiel vecteur  $A$ , on impose une condition de Dirichlet<sup>23</sup> homogène sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine (cette hypothèse est acceptable car la frontière du domaine  $\Omega$  est loin de la zone d'intérêt  $\Omega_T$ ). La fonction objectif  $F$  sera l'erreur quadratique entre le champ  $\mathbf{B}_0$  et celui calculé  $\mathbf{B}(A)$  dans le domaine  $\Omega_T$ . Le problème d'optimisation peut-être formulé comme suit :

$$(\varphi) \begin{cases} \min_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) = \int_{\Omega_T} \|\mathbf{B}(A) - \mathbf{B}_0\|^2 d\Omega, & (2.46) \\ \text{s.c. :} \\ -\nabla \times [\nu(\mathbf{p})\mathbf{B}(A) - \mathbf{M}(\mathbf{p})] + J(\mathbf{p}) = 0, \text{ dans } \Omega, \text{ avec } A|_{\partial\Omega} = 0, & (2.47) \\ \mathbf{p} \in \mathcal{P} := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) : \mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max}, \int_{\Omega_v} \mathbf{p} d\Omega = V_0 \right\}, & (2.48) \end{cases}$$

avec :

23. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 Février 1805 - 5 Mai 1859) : mathématicien Allemand. Il fut le professeur de Riemann (Georg Friedrich Bernhard Riemann : 17 Septembre 1826 - 20 Juillet 1866).

- $\mathbf{p}_{\min}$  et  $\mathbf{p}_{\max}$  les bornes inférieures et supérieures de la variable  $\mathbf{p}$ ,
- $V_0$  un volume limite fixé.
- $\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_0\|^2 = |\mathbf{B}_x - \mathbf{B}_0 x|^2 + |\mathbf{B}_y - \mathbf{B}_0 y|^2$ , avec  $\mathbf{B}_x$  et  $\mathbf{B}_y$  les composantes cartésiennes du champ magnétique  $\mathbf{B}(A) := \mathbf{B}$ .

Le problème  $(\varphi)$  est présenté sous une forme continue. Généralement, on choisit plutôt une formulation initiale discrète, ce qui peut camoufler certains problèmes liés à la régularité des fonctions, conduisant à des singularités lors de la résolution numérique. Avec le vecteur potentiel  $A$  qui est une fonction de  $\mathbf{p}$ , des techniques proches de celles utilisées en théorie de contrôle optimal pourront être employées pour les calculs différentiels de la fonction objectif  $F$ . Ainsi,  $A$  sera aussi considérée comme une variable d'état associée au système primal défini par l'équation (2.47). En effet, ce problème étant défini implicitement en fonction de la variable de conception  $\mathbf{p}$ , les méthodes classiques ne peuvent permettre l'obtention de son gradient qui est fondamental en optimisation, en particulier pour notre code d'optimisation utilisant des algorithmes de descente. On notera par  $\mathcal{D}_{\text{adm}}$ , le domaine admissible de  $(\varphi)$ , donné par :

$$\mathcal{D}_{\text{adm}} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P} \mid \exists A \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ et } h(\mathbf{p}, A) = 0\}, \quad (2.49)$$

avec :

- l'espace de Dirichlet homogène  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , défini par :

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{f \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid f|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2.50)$$

- la fonction  $h$  est donnée par :

$$h(\mathbf{p}, A) = -\nabla \times [\nu(\mathbf{p})\mathbf{B}(A) - \mathbf{M}(\mathbf{p})] + J(\mathbf{p}). \quad (2.51)$$

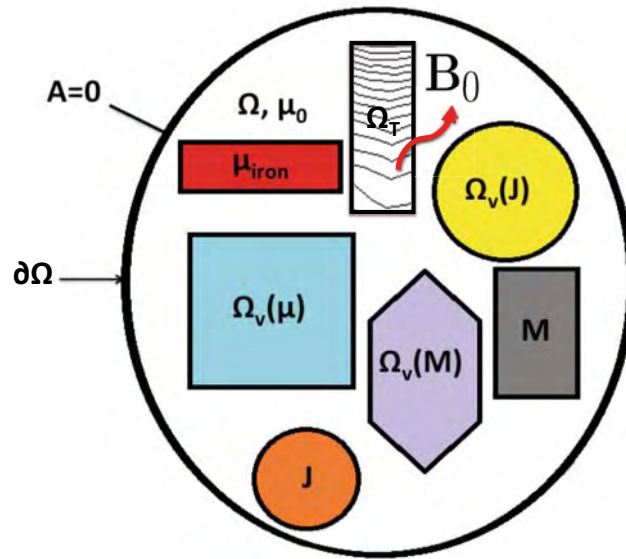


FIGURE 2.10 – Subdivision du domaine pour l'optimisation topologique.

### 2.5.5 Existence de Solutions pour le Problème de Design

Comme pour tout problème, on doit vérifier que  $\mathcal{D}_{\text{adm}}$  contient au moins un élément. D'abord, concernant la variable de conception  $\mathbf{p}$ , l'admissibilité d'un paramètre de conception dépend de l'ensemble de base  $\mathcal{P}$  qui fait intervenir la valeur du volume imposé  $V_0$ . En effet, un mauvais choix de cette valeur peut impliquer des difficultés à trouver des formes topologiques adéquates pour  $\Omega_v$ , pouvant satisfaire  $\int_{\Omega_v} \mathbf{p} d\Omega = V_0$ . En pratique, il est possible d'analyser le problème avec plusieurs  $V_0$ , ce qui peut servir aussi à améliorer l'encombrement en noyau magnétique des anciens circuits en réduisant leurs volumes initiaux. Autrement, on transforme la contrainte en inégalité dans  $\mathcal{P}$ , et dans ce cas on obtient un domaine plus vaste. L'approche théorique avec l'inégalité reste quasi-identique au modèle précédent.

Pour  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ , et un vecteur  $\mathbf{p}$  de  $\mathcal{P}$ , on doit résoudre l'EDP de Maxwell,  $h(\mathbf{p}, A) = 0$ , pour avoir le potentiel  $A$ . Comme les fonctions  $\nu$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $J$  sont bornées, avec le théorème de *Lax-Milgram*<sup>24</sup>, on montre l'existence et l'unicité de la solution pour ce problème [58, 59, 60, 69]. Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{D}_{\text{adm}}$  sera non vide. Il reste maintenant à examiner l'existence de solutions réalisables et intéressantes pour le concepteur.

Enfin, bien que l'on travaille sur un domaine réalisable,  $(\wp)$  dérive d'un problème inverse, et il est connu qu'en toute généralité, ces problèmes sont *mal-posés* [75, 78, 79, 80]. La notion de problème *bien-posé* est un concept mathématique introduit par Hadamard<sup>25</sup> comme suit, un problème (ou modèle) est bien-posé si et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites : (i) l'**existence de solution**, (ii) l'**unicité de la solution**, (iii) la **stabilité du modèle** (la dépendance de façon continue par rapport aux données dans le cadre d'une topologie raisonnable). Pour les problèmes inverses de conception magnétostatique, il est très délicat de garantir l'existence propre même d'une solution pour la performance/champ imposé. De plus, une des spécificités des systèmes magnétiques est la non unicité des données d'entrées pour une sortie fixée. Ainsi à titre d'exemple, s'agissant du circuit magnétique du PEH, l'équivalence courant  $\leftrightarrow$  aimant induit indubitablement qu'il est possible de trouver un noyau d'aimant permanent qui génère la même configuration magnétique qu'une distribution de densité de courant traversant les bobines (voir les détails donnés dans la sous-section 2.5.2.2). De plus,  $(\wp)$  est très sensible aux perturbations des paramètres de conception. En effet, une petite modification des valeurs des sources de champ magnétiques  $J$  et  $\mathbf{M}$  peut entraîner des variations importantes de l'intensité du champ. En revanche, pour des classes de matériaux fixées (matériaux ferromagnétiques doux ou durs), une variation des propriétés du milieu  $\mu$  (ou  $\nu$ ) n'implique pas de modifications significatives sur la configuration magnétique du dispositif, on a une certaine stabilité par rapport à ce paramètre (voir aussi d'autres cas de faible stabilité ou de stabilité partielle en électromagnétisme dans [75]). A fortiori, le problème d'optimisation  $(\wp)$  est non

24. Théorème fondamental en EDP, du nom de :

- Peter Lax (1er Mai 1926 à Budapest - ...) est un mathématicien Hongrois de nationalité Américaine,
- Arthur Norton Milgram (3 Juin 1912 - 30 Janvier 1961) est un mathématicien Américain.

25. Jacques Salomon Hadamard (8 Décembre 1865 - 17 Octobre 1963) : mathématicien Français. Il est connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie.

convexe.

Ainsi, on montre à quel point le problème  $(\wp)$  peut-être difficile à résoudre. Afin de trouver des solutions approchant au mieux la cartographie magnétique cible  $\mathbf{B}_0$ , on choisit des techniques qui permettent si possible d'atteindre des optima locaux à défaut d'avoir un optimum global.

Dans l'optique de résoudre le problème  $(\wp)$ , nous avons privilégié l'utilisation des algorithmes de descente, par conséquent une information du premier ordre de la fonction coût est capitale. Ces algorithmes sont en effet assez puissants numériquement pour trouver des solutions optimales. Et cela, en un temps-CPU relativement court même pour des problèmes de grande taille (comparativement aux autres algorithmes numériques tels que ceux sans calcul de dérivées).

### 2.5.5.1 Analyse de la Sensibilité du Problème

En optimisation topologique, la sensibilité du problème mesure les variations du critère par rapport aux paramètres de conception. Ces paramètres de conception dépendent évidemment du problème étudié : (a) en optimisation de dimensionnement, ce sont les dimensions géométriques ; (b) en optimisation de forme, ce sont les frontières ; (c) en optimisation topologique par la distribution de matière, ce sont les propriétés des sources et des matériaux (cela prend la forme de dérivation par rapport au domaine car c'est à travers les propriétés matérielles que l'on fait la subdivision du domaine). Ainsi, la définition suivante en découle :

**Définition 2.9** *La sensibilité du problème  $(\mathcal{P})$  est la dérivée de  $F$  par rapport aux paramètres de conception  $\tilde{\mathbf{p}}$  ; elle est définie par :*

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{F(\tilde{\mathbf{p}} + \zeta) - F(\tilde{\mathbf{p}})}{\|\zeta\|}. \quad (2.52)$$

Lorsqu'elle existe et est finie, cette dérivée sera notée par  $\nabla_{\mathbf{p}} F(\tilde{\mathbf{p}})$  ou  $F'(\tilde{\mathbf{p}})$  (dérivées en la variable  $\tilde{\mathbf{p}}$ ).

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la sensibilité d'un problème. Parmi ces méthodes, nous avons : 1) la Méthode de la Variable Adjointe (MVA) [75, 81, 82, 83, 84, 85], 2) la méthode de l'énergie mutuelle [86], 3) le théorème de Tellegen<sup>26</sup> [87]. En général, lorsque l'on dispose d'un modèle discret, la sensibilité se calcule directement à partir des équations algébriques définissant le modèle. L'approche MVA reste tout de même la plus populaire pour le calcul des gradients surtout pour les problèmes implicites à partir des contraintes EDPs. C'est aussi cette méthode que nous allons utiliser pour déterminer le gradient topologique de  $F$ . On obtient le résultat suivant :

**Proposition 2.1** *Le gradient Topologique de  $(\wp)$  est donné par :*

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} \lambda + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B}(\lambda) - \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B}(A) \mathbf{B}(\lambda) \right] d\Omega, \quad (2.53)$$

---

26. Bernard DH Tellegen (24 Juin 1900 - 1930 Août 1990) : Néerlandais ingénieur électricien et inventeur de la pentode et du gyrateur.

où la fonction  $\lambda \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  est solution du problème suivant :

$$\nabla \times [\nu \mathbf{B}(\lambda) - \mathbf{M}_a \mathbf{1}_{\Omega_T}] = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{avec } \mathbf{M}_a = 2[\mathbf{B}x - \mathbf{B}_0x, \mathbf{B}y - \mathbf{B}_0y]. \quad (2.54)$$

avec :  $\mathbf{1}_{\Omega_T}$  la fonction indicatrice de la zone de mesure  $\Omega_T$ , voir Figure 2.10 (rappel :  $\mathbf{1}_{\Omega_T} = 1$  sur  $\Omega_T$  et 0 ailleurs).

La fonctionnelle  $\lambda$  est appelée *variable adjointe* (à la variable primale  $A$ ) et solution d'un *système adjoint* (2.54) (au système primal (2.47)) aussi appelé *état adjoint* (notamment en théorie de contrôle) ou *multiplicateur de Lagrange* pour la contrainte EDPs de  $(\wp)$  (en optimisation avec contraintes non linéaires).

Pour établir la preuve de la proposition 2.1, on aura besoin du théorème suivant :

**Théorème 2.1** Soit  $\Omega$  une partie Lipschitz de  $\mathbb{R}^n$ . La formule de Green<sup>27</sup> dans l'espace fonctionnel associé à l'opérateur rotationnel s'écrit :

✱ pour  $n = 3$ , on a :  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} d\partial\Omega, \quad (2.55)$$

✱ pour  $n = 2$ , on a :  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \forall u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \cdot u d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot}(u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot u d\partial\Omega, \quad (2.56)$$

avec  $\boldsymbol{\eta}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  les vecteurs unitaires respectivement normal et tangent à la frontière  $\partial\Omega$ , voir la Figure 2.11

**Preuve:** Voir les Théorème 2.11 [69] et Théorème 3 [77]. ■

Maintenant, on peut commencer la preuve de la proposition 2.1.

**Preuve:** La preuve se fait en 3 étapes :

1. *Calcul du Lagrangien* : le Lagrangien noté  $\mathcal{L}$  aussi appelé fonction objectif augmentée associée au problème  $(\wp)$ , peut-être définie par la somme de  $F$  et d'une formulation faible (variationnelle) de l'équation de Maxwell (2.47). Ainsi, pour tout  $(\mathbf{p}, A, \lambda) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, A, \lambda) = F(\mathbf{p}) + \int_{\Omega} \lambda h(\mathbf{p}, A) d\Omega. \quad (2.57)$$

---

27. George Green (14 Juillet 1793 - 31 Mai 1841) : physicien Britannique. Il a contribué au développement d'outils d'analyse mathématique pour l'électromagnétisme (notamment les fonctions potentielles ou les fonctions de Green).

En utilisant la technique d'intégration par parties donnée au théorème 2.1 et en se rappelant que  $\mathbf{B}(A) = \mathbf{rot}(A)$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda h(\mathbf{p}, A) d\Omega &= \int_{\Omega} [-\nabla \times (\nu \mathbf{B}(A) - \mathbf{M}) + J] \lambda d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} -\nabla \times (\nu \mathbf{B}(A) - \mathbf{M}) \lambda d\Omega + \int_{\Omega} J \lambda d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} J \lambda d\Omega - \int_{\Omega} (\nu \mathbf{B}(A) - \mathbf{M}) \mathbf{B}(\lambda) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}_\tau \lambda d\partial\Omega, \end{aligned}$$

comme,  $\lambda|_{\partial\Omega} = 0$ , on obtient finalement la formulation faible suivante :

$$\int_{\Omega} \lambda h(\mathbf{p}, A) d\Omega = \int_{\Omega} [J\lambda - \nu \mathbf{B}(A) \mathbf{B}(\lambda) + \mathbf{M} \mathbf{B}(\lambda)] d\Omega. \quad (2.58)$$

Avec la relation (2.58), l'expression de  $\mathcal{L}$  devient :

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, A, \lambda) = \int_{\Omega} \|\mathbf{B}(A) - \mathbf{B}_0\|^2 \mathbb{1}_{\Omega_T} d\Omega + \int_{\Omega} [J\lambda - \nu \mathbf{B}(A) \mathbf{B}(\lambda) + \mathbf{M} \mathbf{B}(\lambda)] d\Omega. \quad (2.59)$$

2. *Détermination du système adjoint* : Pour cela, on utilise les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre via le théorème de Karush-Kuhn-Tucker<sup>28</sup> (KKT) équivalentes à la stationnarité du Lagrangien [44, 45, 48, 81]. Pour un triplet  $(\mathbf{p}, A, \lambda)$  satisfaisant la condition de KKT, on a :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A}(\mathbf{p}, A, \lambda), \varphi \right\rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (2.60)$$

Compte tenue de la linéarité de l'opérateur  $\mathbf{B}$ , en utilisant l'expression (2.59), l'expression de gauche dans l'égalité (2.60) donne :

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A}(\mathbf{p}, A, \lambda), \varphi \right\rangle \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial(|\mathbf{B}_x - \mathbf{B}_0 x|^2 + |\mathbf{B}_y - \mathbf{B}_0 y|^2) \mathbb{1}_{\Omega_T}}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}(\varphi) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \nu \mathbf{B}(\varphi) \mathbf{B}(\lambda) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.61)$$

28. Aussi connu dans la littérature sous le nom de conditions de Kuhn-Tucker.

— Harold William Kuhn (29 Juillet 1925 - Juillet 2014) était un mathématicien et économiste Américain.

— Albert William Tucker (28 Novembre 1905 - 25 Janvier 1995) était un mathématicien Américain d'origine Canadienne.



Il s'ensuit alors que :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A}(\mathbf{p}, A, \lambda), \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} [\mathbf{M}_a \mathbf{1}_{\Omega_T} - \nu \mathbf{B}(\lambda)] \mathbf{B}(\varphi) d\Omega, \quad (2.62)$$

Avec la condition de stationnarité (2.60), et en utilisant le Théorème 2.1, comme la fonction  $\varphi$  est prise quelconque dans  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , on obtient l'équation suivante :

$$\nabla \times [\nu \mathbf{B}(\lambda) - \mathbf{M}_a \mathbf{1}_{\Omega_T}] = 0. \quad (2.63)$$

On montre ainsi qu'un état primal  $A$  est optimal s'il existe  $\lambda$  solution du système adjoint (2.54).

De manière analogue, on trouve que la condition de stationnarité par rapport à  $\lambda$  donne le système primal dont le potentiel  $A$  est solution.

3. *Calcul du gradient topologique* : Pour tout couple  $(\mathbf{p}, A)$  tel que  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_{\text{adm}}$  et  $A$  le potentiel vecteur associé, on a :

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, A, \lambda) = F(\mathbf{p}) \quad \forall \lambda, \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, A, \lambda) = F'(\mathbf{p}). \quad (2.64)$$

De l'indépendance des variables  $\mathbf{p}$ ,  $A$  et  $\lambda$ , dans la définition de  $\mathcal{L}$ , et du fait que les fonctionnelles définissant les champs magnétiques, les propriétés des matériaux et les sources soient bornées, alors en utilisant les propriété de dérivation sous le signe intégrale, on trouve :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, A, \lambda) = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial J(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \lambda + \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B}(\lambda) - \frac{\partial \nu(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B}(A) \mathbf{B}(\lambda) \right] d\Omega, \quad (2.65)$$

En comparant les équations (2.64) et (2.65), le résultat de la Proposition 2.1 sur le calcul de la sensibilité du problème s'ensuit. ■

**Remarque 2.5** (sur le calcul de la sensibilité)

- Dans la formulation du Lagrangien  $\mathcal{L}$ , on peut intégrer la condition de Dirichlet homogène  $A|_{\partial\Omega}$  en ajoutant le terme  $\int_{\partial\Omega} \lambda A d\partial\Omega$ . Dans ce cas, on obtient le même résultat, seulement il y a plus de calculs supplémentaires à faire, voir par exemple [81].
- Il est possible aussi d'obtenir des résultats similaires avec des conditions aux limites de type Neumann, ou mixte. En générale, on obtient les mêmes types de conditions pour les deux états primal et adjoint, voir [75, 77].

### 2.5.6 Interprétation Physique du Modèle Adjoint

En toute généralité, l'état adjoint n'a pas de sens physique concret. Ce système est perçu comme un moyen permettant de calculer la sensibilité. En ce qui concerne notre modèle magnétostatique, le modèle adjoint correspondant ainsi trouvé n'est pas vide de sens. En effet, en comparant les équations (2.47) et (2.54), il apparaît que, l'état adjoint (2.54) est aussi de type « maxwellerien » (c'est-à-dire une équation de type d'électromagnétisme de Maxwell, notamment similaire à l'équation



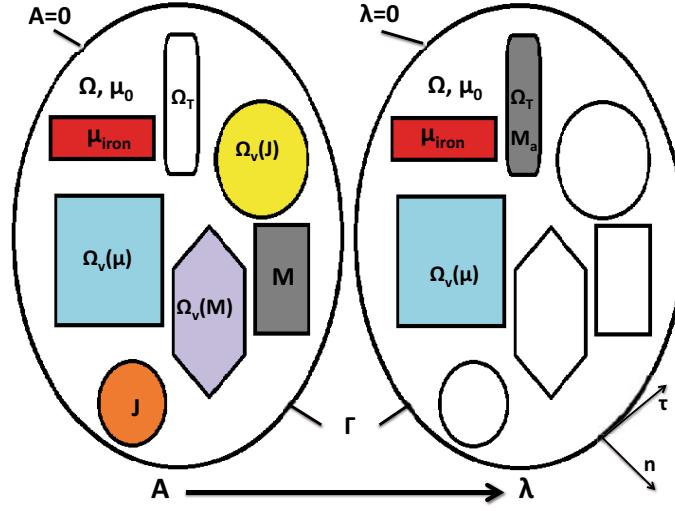


FIGURE 2.11 – (à gauche) la distribution de matériaux et de sources magnétiques pour le domaine primal où le potentiel vecteur  $A$  est calculé ; (à droite) le domaine dédié au modèle adjoint obtenu, où le pseudo-potential vecteur  $\lambda$  est calculé.

de Maxwell (2.45)). Ce nouveau problème magnétostatique a les mêmes propriétés magnétiques au niveau des matériaux que le problème initial. Par contre, ils n'ont aucune source magnétique en commun. La distribution de sources du système adjoint est la quantité  $\mathbf{M}_a \mathbb{1}_{\Omega_T}$  donné dans l'équation (2.54) et analogue à des aimants permanents qui mesure l'écart entre les champs magnétiques calculés  $\mathbf{B}$  et celui imposé  $\mathbf{B}_0$ . Ainsi les modules  $\|\mathbf{B}(\lambda)\|$  des champs magnétiques adjoints servent d'indicateur de bonne convergence vers une meilleure approximation de  $\mathbf{B}_0$  au cours du processus d'optimisation. De plus,  $\mathbf{M}_a \mathbb{1}_{\Omega_T}$  se comporte en aimant permanent placé dans la region cible  $\Omega_T$ . Une illustration est donnée dans la Figure 2.11 comparant les domaines d'étude primal et adjoint.

## 2.6 Conclusion

Nous avons rappelé les notions essentielles de l'optimisation mathématique et les opérateurs différentiels nécessaires à l'élaboration d'un modèle magnétostatique de design de circuits magnétiques. Pour la conception optimale structurale, il existe principalement 3 classes de méthodes qui sont l'optimisation de dimensionnement, l'optimisation de forme géométrique et l'optimisation topologique. Nous nous sommes focalisés sur l'optimisation topologique pour trouver des solutions à notre problème inverse de conception car elle est beaucoup plus générale et elle permet l'obtention de formes complexes et variées sans aucun a priori restrictif explicite ou implicite. Les simulations numériques des PEHs sont assez complexes, et peuvent se faire selon deux niveaux principaux à savoir : la configuration architecturale globale du circuit magnétique et l'analyse du comportement des plasmas dans le canal plasma du moteur. Chacune de ces simulations en 3D demande des temps de résolutions relativement élevés. Ainsi, il est important de s'appuyer sur des modèles réduits typiquement en 2D, afin d'effectuer des simulations en temps raisonnable.

La mise en place des modèles réduits fait appel à des hypothèses simplificatrices qui rendent possible la validation des problèmes réduits pour la réalisation concrète du PEH. Avec la donnée d'un champ requiert  $\mathbf{B}_0$  associé à une topographie au sein du canal plasma et à ses environs formant une zone cible  $\Omega_T$ , nous avons proposé une formulation de ce problème de conception du circuit magnétostatique capable de générer un tel champ magnétique. Cette formulation ( $\varphi$ ) a un critère de type moindres carrés qui est dédié à la résolution de problèmes inverses notamment de conception par l'optimisation topologique. Par la suite, les calculs du gradient topologique ont été faits avec une MVA. Le gradient analytique calculé est très utile dans l'utilisation d'algorithmes de descente au cours du processus d'optimisation.

L'implémentation numérique du modèle d'optimisation ( $\varphi$ ), passe par une nouvelle formulation associée à une discrétisation (en éléments finis), ensuite des approches de densité de matériaux seront utilisées dans le domaine de conception pour déterminer les distributions de sources et matériaux sur un maillage du domaine à topologie variable  $\Omega_v$ . Le chapitre suivant fera l'objet de plus détails sur cette approche de densité de matériaux couramment connu sous le nom de modèle SIMP proposé par Bendsøe [51, 52].

## Chapitre 3

# Résolution Numérique du Problème de Conception Topologique par la Méthode de Densité de Matériaux

### 3.1 Introduction

Après avoir proposé le modèle théorique continu pour la résolution de problèmes inverses de conception de circuits magnétiques pour PEHs dans le chapitre 2, dans ce chapitre, nous allons présenter les principales méthodes d'optimisation topologiques utilisées pour trouver des solutions numériquement. Cette résolution se fait au moyen d'un second modèle qui est lui discret. Parmi les méthodes d'optimisation topologique existantes, l'approche par la distribution optimale de densité matériaux connue sous le nom de modèle SIMP a été privilégiée. Cette approche est une variante de la méthode d'homogénéisation qui sera expliquée dans ce chapitre. Ainsi par le modèle SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) un nouveau programme de design des circuits optimaux a été élaboré. Ce programme appelé **ATOP<sup>TO</sup>** (Algorithm To Optimize Propulsion with Topology Optimization) inclut une phase de post-traitement permettant l'obtention de circuits à topologie optimale qui sont réalisables (pouvant être manufacturé concrètement selon le model réduit traité). De plus, le code **ATOP<sup>TO</sup>** implémente de nouveaux Schémas d'Interpolation de Matériaux (SIMs) qui sont plus généraux et plus efficaces que les schémas couramment utilisés (dans ce type d'approche pour l'optimisation topologique). Cela a accru l'efficacité et la robustesse de notre programme d'optimisation topologique. Ce chapitre contient aussi des résultats qui valident notre procédure automatique de conception optimale de circuits magnétiques pour les PEHs.

### 3.2 Généralités sur les Méthodes d'Optimisation Topologique

Après la conception des structures mécaniques, de nos jour, l'optimisation topologique est de plus en plus présente dans les procédures de développement et de conception des dispositifs électromagnétiques. Selon la structure étudiée, les problèmes d'optimisation topologique peuvent être divisés en deux grands types (G. I. N. Rozvany, 2001 [53]) :

- les problèmes d'optimisation topologique des *structures à treillis*. Les structures traitées sont discrètes, constituées en général de poutres, de portiques, etc. La particularité de ces structures en treillis est que le rapport volume de matériaux/ volume total de l'espace occupé par le dispositif est très faible. Dans ce cas, une topologie optimale sera cherchée dans le sens de la connexité des jonctions des différents membres de la structure ; ainsi, on cherche à éliminer les membres inutiles et/ou à renforcer les membres importants par rapport à un critère qui peut être la résistance de la structure à réaliser à des charges externes appliquées, voir Figure 3.1 (de [54]) .
- les problèmes d'optimisation topologique des *structures continues*. Ce sont des structures continues dont le volume de matériaux dans le domaine de conception est plus élevé. Dans ces problèmes, l'optimisation topologique a pour but de localiser le domaine variable de manière optimale entre les différents types de matériaux disponibles pour la conception.

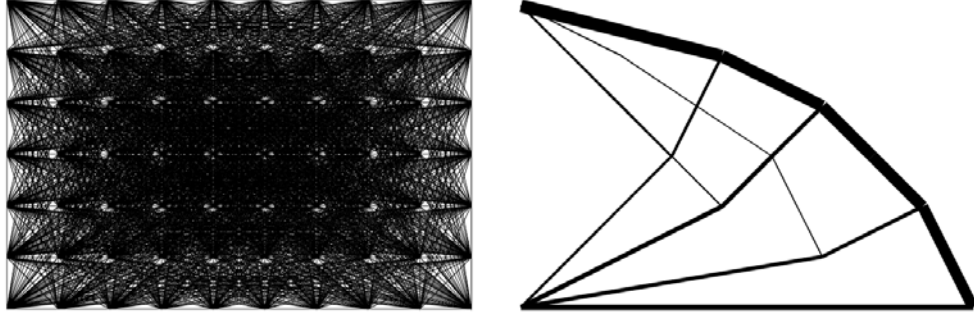


FIGURE 3.1 – Optimisation topologique de treillis de barres (de type Michelle trusses).

Les premiers travaux en optimisation topologique furent ceux des structures à treillis. Notamment, à travers les travaux et les théories de Maxwell (1890) et Michelle (1904) qui ont été à l'origine des formulations des structure en treillis : c'est ainsi que la plupart de ces types de structures sont connues sous le nom de *Michelle truss* ou *Michelle structure* [88, 89].

En optimisation topologique des structures continues, on utilise une *approche microscopique* de la structure. La topologie optimale est projetée sur un maillage fixe au cours de l'optimisation numérique ; ainsi, le maillage reste fixe mais la topologie change au cours des itérations. Contrairement à l'optimisation de forme géométrique où l'approche est plutôt *macroscopique* car dans ce cas le domaine variable est considéré de manière globale en le bougeant à travers ses frontières libres jusqu'à ce que soit atteinte une forme optimale. Dans l'approche macroscopique, le plus souvent au cours du processus d'optimisation, on adapte au fil des itérations de l'algorithme un maillage voué à la nouvelle géométrie (courante). Les principales méthodes d'optimisation topologique des structures continues sont la méthodes de Gradient Topologique, de Lignes de Niveau, d'Homogénéisation et de Distribution de Matériaux (ou Méthode de la Densité).

### 3.3 Méthodes d'Optimisation Topologique

Soit  $\Omega$  une partie bornée et régulière de  $\mathbb{R}^d$  (avec  $d = 2, 3$ ). Considérons un problème d'optimisation topologique qui consiste à concevoir un dispositif contenu dans  $\Omega$ . Notons  $\Omega_{\text{adm}}$  l'ensemble des formes topologiques admissibles, idéalement c'est un ensemble comme  $\mathcal{E}_{\text{adm}}$  (conf. chap. 2), pouvant contenir les différentes contraintes de conception d'un dispositif magnétique tels que le volume ou le poids, le périmètre du contour frontalier des éléments topologiques réalisables. Ainsi, une formulation générale du problème peut être donnée par :

$$\min_{\Omega_v \in \Omega_{\text{adm}}} \mathcal{F}(\Omega_v). \quad (3.1)$$

Où :  $\Omega_v$  est la region à topologie variable incluse dans le domaine  $\Omega$ , dans laquelle doivent être déterminées les caractéristiques géométriques (taille des trous ou quantité de matériau utilisée) et topologiques (nombre de composantes connexes). En

général, la fonction coût est donnée par

$$\mathcal{F}(\Omega_v) = \int_{\Omega} f(u) d\Omega, \quad (3.2)$$

où :  $u$  est la solution d'une EDP posée sur le domaine  $\Omega$  (contenant la zone à topologie variable  $\Omega_v$ ). Nous allons maintenant présenter l'aspect général des techniques de résolution du problème d'optimisation (3.1) avec les principales méthodes d'optimisation topologique.

### 3.3.1 Méthode de Gradient Topologique

La méthode de gradient topologique est une approche purement basée sur l'analyse de la sensibilité de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ . Initialement connue dans la littérature sous le nom « *bubble method* » (qui signifie littéralement méthode de la bulle), elle permet de détecter l'insertion d'un trou (ou d'une bulle) dans un domaine de design ; cette méthode a été introduite par A. Schumacher [90]. Par suite, l'approche a évolué notamment grâce aux travaux de Sokołowski *et al.* [91, 92, 93], Masmoudi *et al.* [94, 95, 96]. Ces auteurs proposèrent à la fois des justifications mathématiques relatives aux différentes théories du calcul du gradient topologique et des idées d'extension à l'étude des problèmes plus généraux avec diverses conditions aux limites.

Soient  $\Theta$  une forme géométrique élémentaire et  $x$  un point de  $\Omega_v$ , on considère une perturbation topologique du domaine variable  $\Omega_v$  autour du point  $x$  de même classe topologique que  $\Theta$  noté par  $\mathbb{B}(x, \delta)$  (pour un certain  $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ ) et définie par la similitude suivante :

$$\mathbb{B}(x, \delta) = x + \delta\Theta. \quad (3.3)$$

En perturbant  $\Omega_v$  de  $\mathbb{B}(x, \delta)$ , on obtient un domaine perturbé  $\Omega_{v,\delta} = \Omega_v \setminus \overline{\mathbb{B}(x, \delta)}$ , voir la Figure 3.2. Lorsqu'il existe, on appelle *asymptotique topologique* le développement asymptotique d'ordre un<sup>1</sup>, de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  en  $\Omega_v$  donné par

$$\mathcal{F}(\Omega_{v,\delta}) = \mathcal{F}(\Omega_v) + \vartheta(\delta)G_{\Omega_v}(x) + \vartheta(\delta)o(\delta), \quad (3.4)$$

où : l'opérateur  $\delta \in \mathbb{R}_+ \mapsto \vartheta(\delta)$  est une fonction scalaire positive telle que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \vartheta(\delta) = 0$ . L'existence du développement (3.4) dépend de la régularité du domaine  $\Omega$ , de la différentiabilité de l'intégrant  $f$  (voir l'équation (3.2)) et aussi de celle de la fonction de mesure des perturbations  $\vartheta$ . Lorsqu'elle existe l'asymptotique topologique est unique.

**Définition 3.1** *L'unique fonction  $x \mapsto G_{\Omega_v}(x)$  dans (3.4) est appelée gradient topologique (ou dérivée topologique) de la fonction coût  $\mathcal{F}$  du problème d'optimisation topologique (3.1) au point  $x$  du domaine d'étude  $\Omega$ .*

1. Lorsque le problème est suffisamment régulier en terme du domaine variable de design et des fonctions définissant les contraintes EDPs alors le développement asymptotique topologique peut-être à des ordre  $m > 1$ . En effet des articles sur le cas d'ordre deux existent dans la littérature, voir par exemple [97].

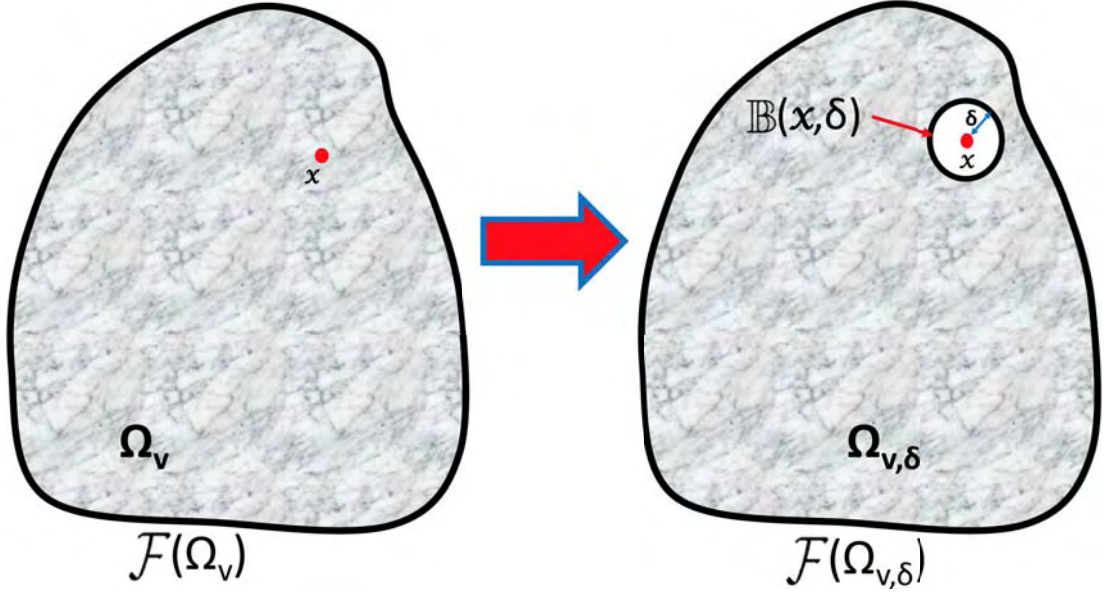


FIGURE 3.2 – Principe du concept du gradient topologique : le domaine initial  $\Omega_v$  est perturbé par l'insertion de bulle de la forme  $\mathbb{B}(x, \delta)$ . La nouvelle topologie  $\Omega_{v,\delta}$  sera meilleure par rapport à la précédente selon le signe de la variation  $\mathcal{F}(\Omega_{v,\delta}) - \mathcal{F}(\Omega_v)$ . Dans ce cas, l'élément géométrique de base  $\Theta$  est un disque.

Cette définition se justifie par le fait que la quantité  $G_{\Omega_v}$  représente le taux de variation, c'est-à-dire la sensibilité de l'objectif  $\mathcal{F}$  par rapport à une perturbation topologique du domaine. De plus, avec l'expression (3.4) et compte tenu de la définition de  $\vartheta$ , on peut donner le gradient topologique par la limite différentielle suivante :

$$G_{\Omega_v}(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\Omega_{v,\delta}) - \mathcal{F}(\Omega_v)}{\vartheta(\delta)}. \quad (3.5)$$

Ainsi, comme en optimisation classique, le signe de  $G_{\Omega_v}$  indique la possibilité de trouer le domaine  $\Omega_v$  (s'il est initialement formé de matériau solide) ou de mettre un substrat/matière (s'il est initialement vide). Ce concept de détermination de gradient d'un problème d'optimisation topologique est illustré sur la Figure 3.2.

En pratique, l'expression explicite de  $G_{\Omega_v}$  dépend évidemment du critère mais aussi des conditions aux limites de la contrainte EDP utilisée. Généralement, la détermination d'une expression analytique de  $G_{\Omega_v}$  se fait à travers des formulations Lagrangiennes, qui nécessitent l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange qui est lui solution d'un nouveau modèle appelé état adjoint. Cet état adjoint est aussi une EDP de même type que l'état primal [93] (voir par la Section 2.5.5.1 du Chapitre 2).

Dans la résolution numérique avec le gradient topologique, on définit la forme géométrique élémentaire  $\Theta$  car c'est elle qui impose la forme des trous (ou des zones à matériaux) à inclure pour modifier la topologie de manière optimale. Leur taille est donnée par le coefficient  $\delta$ , (voir l'équation (3.3)). Un choix judicieux de la fonction d'approximation et de correction du premier ordre  $\vartheta$  de  $\mathcal{F}$  est de



prendre la mesure de Lebesgue de la perturbation  $\mathbb{B}(x, \delta)$ . En effet, la fonction  $\delta \mapsto \vartheta(\delta) := \text{mes}(x + \delta\Theta)$ , satisfait les propriétés exigées pour  $\vartheta$ .

Ainsi, comme en optimisation classique, le signe de  $G_{\Omega_v}$  indique la possibilité de trouver le domaine  $\Omega_v$  (s'il est initialement formé de matériau solide) ou faire apparaître un substrat/matière dans un domaine à topologie variable (s'il est initialement vide). Par conséquent, on pourra utiliser  $G_{\Omega_v}$  comme direction de descente dans l'algorithme d'optimisation numérique [95]; d'où dans le cas de générations de trous dans un domaine ferromagnétique, on doit avoir :  $\mathcal{F}(\Omega_{v,\delta}) < \mathcal{F}(\Omega_v)$ . La topologie optimale  $\Omega_v^{\text{opt}}$  sera alors donnée par :

$$\Omega_v^{\text{opt}} := \{x \in \Omega_v : G_{\Omega_v}(x) \geq 0\}. \quad (3.6)$$

### 3.3.2 Méthode des Surfaces/Lignes de Niveaux

L'utilisation de la méthode des lignes ou surfaces de niveaux (ou simplement en anglais : *level-set method*) pour l'optimisation topologique est assez récente. En effet, cette approche a été introduite à la base par S. Osher et J. A. Sethian [98], sous le nom « PSC Algorithm ». Dans leurs travaux, les auteurs présentent cette approche comme un algorithme permettant de calculer l'évolution des surfaces, en résolvant des équations de Hamilton-Jacobi<sup>2</sup> [98, 99, 100, 101]. Ces surfaces en mouvement sont ensuite projetées dans un espace de dimension inférieure sur un maillage fixe. La méthode des lignes de niveaux a été popularisée grâce à son application à la résolution des problèmes d'optimisation structurale. Ainsi, l'approche a su séduire les chercheurs en conception optimale de tout bord notamment en optimisation des structures mécaniques (notamment avec les travaux de G. Allaire, F. Jouve et leurs co-auteurs [102, 104, 105, 106] qui y ont couplé en particulier le concept de gradient topologique, S. Amstutz [107, 108], M. Y. Wang *et al.* [109, 110, 111]) et en conception optimale des dispositifs électromagnétiques (voir les travaux de S. Park *et al.* [112, 113]). Cet engouement vient aussi du fait qu'avec cette méthode de courbes de niveaux, il est possible de faire de l'optimisation de forme en faisant varier les frontières du domaine de conception à travers l'évolution de fonctions de niveaux : ainsi cela peut permettre de changer la topologie d'un domaine de design en y incluant par exemple des perforations grâce à l'image projetée d'une fonction de niveaux sur un maillage donné.

Dans ce qui suit, nous allons décrire le principe de la méthode des surfaces de niveaux.

Pour analyser et suivre l'évolution des frontières libres d'un domaine en vue de faire de l'optimisation de formes, suivant l'idée originale de S. Osher et J. A.

---

2. Ces équations sont les premiers modèles mathématiques du phénomène d'écoulement dont les pionniers furent :

- William Rowan Hamilton (4 Août 1805 - 2 Septembre 1865) : mathématicien, physicien et astronome irlandais.
- Carl Gustav Jakob Jacobi (10 Décembre 1804 - 18 Février 1851) : mathématicien allemand.



Sethian [98], on introduit une fonction implicite  $\psi$  dite de *niveaux*; cette fonction de niveaux sert à paramétrer le domaine et permet de séparer le domaine variable entre les matériaux utilisés pour la conception, voir la Figure 3.3. Dans le cas de deux matériaux disponibles pour le design, en particulier lorsque que l'on a un problème de type binaire (c'est-à-dire où l'on a le choix entre un solide et du vide), la fonction  $\psi$  est donnée dans le domaine global  $\Omega$  comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \psi(x) = 0 \quad \text{si } x \in \partial\Omega \cap \Omega_v, \\ \psi(x) < 0 \quad \text{si } x \in \Omega \setminus \overline{\Omega_v}, \\ \psi(x) > 0 \quad \text{si } x \in \Omega_v. \end{array} \right\} \quad (3.7) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \psi(x) = 0 \quad \text{si } x \in \overline{\Omega_{\text{fer}}} \cap \Omega_{\text{vide}}, \\ \psi(x) < 0 \quad \text{si } x \in \Omega_{\text{vide}}, \\ \psi(x) > 0 \quad \text{si } x \in \Omega_{\text{fer}}. \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

La formulation (3.7) est plus dédiée à de l'optimisation de forme basée sur une approche macroscopique. En effet, comme dans la plupart des cas en optimisation de forme, dans cette formulation, la fonction de niveaux  $\psi$  se déplace avec les frontières libres de  $\Omega_v$  jusqu'à une position optimale sans pour autant introduire de nouvelles perforations. Par contre, la formulation (3.8) est plus adaptée à des modifications topologiques du domaine variable, notamment pour les problèmes d'électromagnétisme car on y utilise une description microscopique du domaine de conception. Dans ce cas, on a  $\Omega = \Omega_{\text{vide}} \cup \Omega_{\text{fer}}$ , en optimisation numérique, on pourra alléger les calculs en fixant les valeurs  $\psi$  en dehors de la zone  $\Omega_v$ .

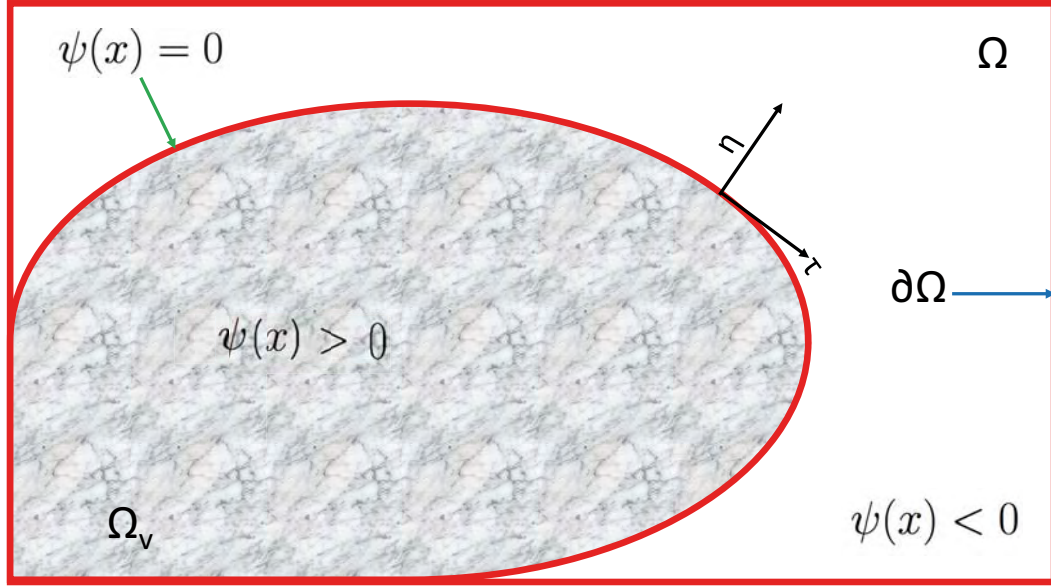


FIGURE 3.3 – Le principe de l'approche par courbes de niveaux (dite level-set method) utilisant une fonction implicite  $\psi$  paramétrant le domaine d'étude pour la conception optimale.

Dans cette approche de courbes de niveau, le principe consiste à suivre la propagation des frontières  $\partial\Omega_v$  (jusqu'à l'obtention d'une forme topologique optimale). Pour cela, on introduit un nouveau paramètre  $t$  (avec  $t \geq 0$ ) ; avec ce second paramétrage, le modèle d'optimisation topologique (3.1) devient un problème d'évolu-

tion temporelle où  $t$  joue le rôle de la variable temporelle<sup>3</sup>. Ainsi, on peut considérer les points spatiaux  $x \in \Omega$  et la fonctionnelle des niveaux  $\psi$  comme dépendant du temps, et on exprime :

- Le déplacement des points  $x(t)$  à partir d'un point  $x_0$  et à une vitesse  $\mathbf{V}(t)$  par :

$$x(t) = \mathcal{D}(x_0, \mathbf{V}(t)), \text{ avec : } \frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{V}_\perp(t). \quad (3.9)$$

Dans l'équation (3.9), la quantité  $\mathbf{V}_\perp$  est la composante normale du vecteur vitesse  $\mathbf{V}$  car il est connu que dans les problèmes de variation des frontières, les variations se font majoritairement suivant la normale  $\eta$  (dans un repère de Frenet<sup>4</sup>  $(\eta, \tau)$ ). Une illustration se trouve sur la Figure 3.3.

- La courbe de niveau zéro de  $\psi$  caractérisant les limites de séparation du domaine topologique par :

$$\psi(t, x(t)) = 0, \forall x(t) \in \partial\Omega(t). \quad (3.10)$$

En théorie, si la fonction  $\psi$  est un *difféomorphisme* au moins  $\mathcal{C}^1$ , on pourrait extraire analytiquement l'ensemble des lignes de niveaux grâce au théorème des fonctions implicites. Sauf qu'en pratique, on n'a pas cette forte régularité sur  $\psi$ . Par conséquent, on résout itérativement ce problème implicite à travers une forme différentielle que l'on rapproche numériquement par différences finies sur un maillage uniforme [98, 104, 114, 115]. Ainsi, en dérivant le modèle Eulérien (3.10) ci-dessus par rapport au temps  $t$ , en tenant compte de (3.9), on obtient une équation de type Hamilton-Jacobi, ci-dessous qui gouverne l'évolution des courbes de  $\psi$  :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{V}_\perp \cdot \nabla_x \psi = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \quad (3.11)$$

avec la condition initiale suivante :

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \forall x \in \Omega. \quad (3.12)$$

En tout point du domaine d'étude on peut exprimer la normale unitaire  $\eta$  en fonction du gradient de la fonction  $\psi$  par  $\eta = \nabla_x \psi / \|\nabla_x \psi\|$ . Par la suite, en remarquant que  $\mathbf{V}_\perp = V_n \eta$ , pour un certain scalaire  $V_n$ , l'équation (3.11) devient.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + V_n \|\nabla_x \psi\| = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega. \quad (3.13)$$

L'équation différentielle (3.13) est aussi de type Hamilton-Jacobi. Il existe une vaste littérature sur l'analyse théorique et numérique justifiant l'existence de solutions régulières de viscosité<sup>5</sup> pour ces EDPs. Plus de détails se trouvent notamment dans les articles de P. L. Lions et M. G. Crandall [118, 119, 120, 121].

3. Ce paramètre est souvent appelé dans la littérature pseudo-temps ou temps fictif. Dans le processus d'optimisation structurale, numériquement il correspond à un pas de descente.

4. Jean Frédéric Frenet (7 Février 1816 -12 Juin 1900) : mathématicien, astronome et météorologue français.

5. La notion de solution de viscosité a été introduite par le mathématicien français Pierre Louis Lions pour les EDPs scalaire du premier ordre [119]. C'est la motivation du passage de l'équation (3.11) vectorielle à la formulation scalaire (3.13).

En pratique, au cours du processus d'optimisation numérique, l'algorithme utilisé pour suivre la propagation de la fonction de niveaux  $\psi$  est assujéti à des singularités et à des instabilités numériques liées principalement aux schémas d'approximation (des EDPs) ou aux maillages (fixes ou adaptatifs) [122]. Dans ce cas, on utilise essentiellement des techniques de pénalisation basées sur l'évaluation de la courbure moyenne  $H$  du niveau considéré. C'est une quantité qui sert de contrôle sur le périmètre du contour permettant d'induire une contrainte régularisatrice. Cette courbure moyenne est la divergence de la normale extérieure unitaire  $\eta$ , et elle définit par :

$$H = \operatorname{div}(\eta) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla_x \psi}{\|\nabla_x \psi\|} \right). \quad (3.14)$$

La Méthode des Lignes de Niveaux a été initialisée pour l'optimisation de forme ; cependant des travaux recents de Allaire, Jouve, Dijk, Keulen et leurs co-auteurs [106, 115, 116, 117], etc) ont montré l'applicabilité de cette approche pour l'optimisation topologique. Il faut noter que la vitesse d'évolution  $\mathbf{V}$  est choisie généralement de telle sorte que le déplacement des frontières du niveau zéro de  $\psi$  entraîne une décroissance du critère  $\mathcal{F}$ . Un choix naturel consiste à prendre cette vitesse égale au gradient (resp. au gradient topologique) lorsque l'on fait de l'optimisation de forme géométrique (resp. de l'optimisation topologique), ce qui implique aussi l'introduction d'une étape d'évaluation d'un système adjoint au modèle initial. C'est ce lien qui unit ces différentes approches de conception optimale des structures.

### 3.3.3 Méthode d'Homogénéisation

Comme le terme *topologie*, le concept d'*homogénéisation* est utilisé dans beaucoup de domaines scientifiques : en médecine, en chimie, en mécanique, en mathématique<sup>6</sup>. Bien que l'utilisation d'une approche par homogénéisation peut-être légèrement différente d'un domaine à un autre, la philosophie de base reste identique. Spécifiquement, en science des matériaux ou en phénoménologie, l'homogénéisation est la procédure qui consiste à établir une harmonie, une cohérence parfaite, de manière continue dans des milieux physiques : ainsi, on transforme un domaine *hétérogène* c'est-à-dire constitué de différents éléments aux propriétés physiques (conductivité, perméabilité, ...) distinctes (appelé phases) en un domaine moyenné correspondant dont la caractéristique physique est dite *homogénéisée* ou *effective*, voir la Figure 3.4.

Les théories de l'homogénéisation sont très utiles dans la modélisation des phénomènes de la réalité physique. En effet, elles permettent de se ramener à des domaines d'études où les méthodes classiques fonctionnent comme nous le verrons dans ce qui suit. Ainsi, elles facilitent la justification de l'existence et la régularité des solutions des EDPs. Autrement, dans les milieux fortement hétérogènes les inclusions (de trous ou de matières) induisent des sauts de discontinuités des

---

6. De plus chaque branche des mathématiques utilisent ce concept plus ou moins différemment : par exemple en algèbre : espace homogènes, en analyse classique : fonctions homogènes, les EDPs : homogénéisation des opérateurs différentiels.

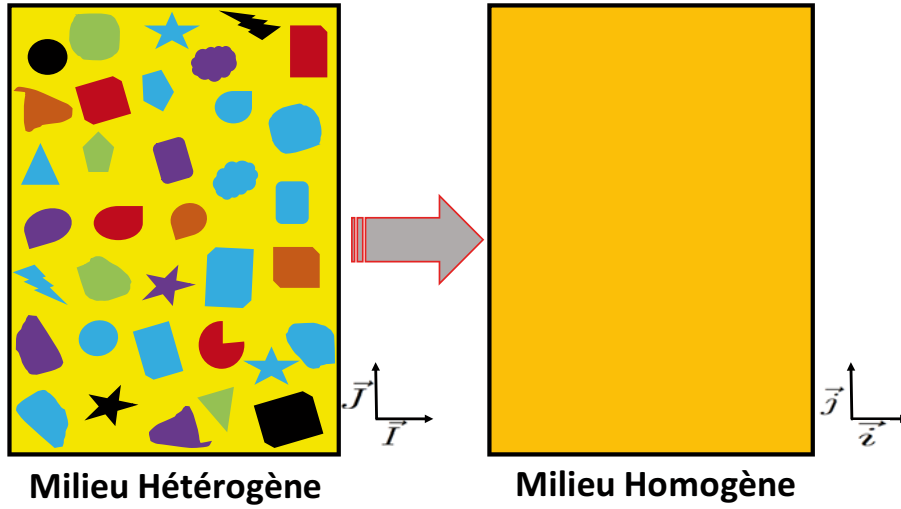


FIGURE 3.4 – Le principe de la méthode d’homogénéisation : On obtient une structure moyennée (milieu effectif) à partir d’un mélange hétérogène multi-phase.

propriétés des matériaux ce qui affecte les solutions calculées de ces EDPs. En particulier dans les milieux non-uniformes, les solutions générées peuvent-être oscillantes (autour de la solution calculée sur le domaine homogène), voir les travaux de Bensoussan, Lions et Papanicolaou [123] de Tartar [125, 126]. Le lecteur peut se référer aussi au document [127] qui présente des détails sur les opérateurs différentiels et les théorèmes de convergences associés. En général, on considère des structures dites *périodiques* où le domaine structural global est composé des duplications par similitude d’une cellule élémentaire ; par exemple, une cellule élémentaire rectangulaire de dimension  $\varepsilon$  dans toutes les directions, comme représenté sur la Figure 3.5. Dans ce cas, le milieu est dit de période  $\varepsilon$  (en général  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ). De plus, dans un milieu périodique, la correspondance du système de coordonnées des deux milieux est la plus simple. Par exemple dans  $\mathbb{R}^2$  : si on note par  $\mathcal{R}_M(O, \vec{i}, \vec{j})$  un système de coordonnées du milieu effectif, alors un repère associé aux coordonnées microscopiques est  $\mathcal{R}_m(O, \vec{I}, \vec{J})$  ; avec  $\vec{I} = (1/\varepsilon)\vec{i}$  et  $\vec{J} = (1/\varepsilon)\vec{j}$ , voir la Figure 3.4. Cela simplifie énormément les expressions du développement asymptotique des vecteurs champ et potentiel magnétique ou du déplacement en mécanique [123, 127, 81].

Les hypothèses pour faire de l’approximation par homogénéisation requièrent que cette quantité soit négligeable devant les dimensions géométriques globales du domaine considéré. Ces milieux périodiques sont fondamentaux dans beaucoup de théories mathématiques basées sur l’homogénéisation. Notamment, c’est le cadre idéal des développements asymptotiques du vecteur de déplacement (solution de la condition d’équilibre des charges appliquées à la structure) dans les problèmes de mécanique et du vecteur potentiel en magnétostatique (solution d’EDPs Maxwell). En particulier, dans les problèmes d’électromagnétisme les vecteurs paramètres des propriétés physiques des milieux (ou matériaux) et potentiel magnétique  $A$ , on fait

le développement à deux échelles suivant :

$$A_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i A_i(x, \frac{x}{\varepsilon}), \quad (3.15)$$

où les  $A_i(x, y)$  sont des fonctions de 2 variables avec  $x$  pour l'analyse du comportement macroscopique (milieu homogénéisé) et  $y$  pour l'analyse du comportement microscopique (milieu hétérogène). Ces fonctions  $A_i(x, y)$  sont  $\varepsilon$ -périodiques en la variable  $y$  (ces fonctions sont aussi oscillantes). De manière analogue, on fait un développement des paramètres magnétiques  $\mathbf{p}$  intervenant dans les lois constitutives des matériaux, qui sera noté  $\mathbf{p}_\varepsilon$  (aussi périodique en la deuxième composante). Rappelons que dans les milieux inhomogènes les paramètres  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{p}_\varepsilon$  sont des tenseurs (d'ordre  $d \times d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , pour  $d = 2, 3$ ).

Ensuite, le couple  $(\mathbf{p}_\varepsilon, A_\varepsilon)$  est injecté dans l'équation de Maxwell-Ampère (voir le chapitre 2). On trouve le modèle suivant prenant en compte les deux niveaux d'évolution des processus électromagnétiques dans le domaine structural étudié :

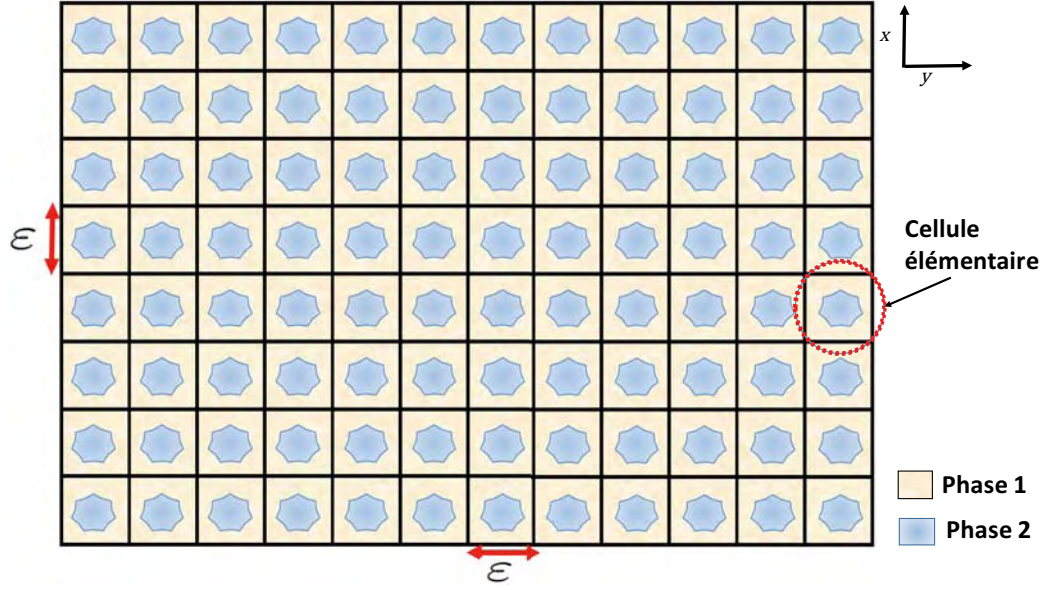
$$\left. \begin{aligned} -\nabla \times [\nu(\mathbf{p}_\varepsilon) \mathbf{B}(A_\varepsilon) - \mathbf{M}(\mathbf{p}_\varepsilon)] + J(\mathbf{p}_\varepsilon) &= 0, \text{ dans } \Omega, \\ A_\varepsilon &= 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Le modèle effectif correspondant à (3.16) est celui satisfait par la limite suivante :

$$(\mathbf{p}_\varepsilon, A_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{p}^*, A^*) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (3.17)$$

Les théorèmes de convergence de la suite  $(\mathbf{p}_\varepsilon, A_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ , d'existence de la limite homogénéisée  $(\mathbf{p}^*, A^*)$  ainsi que de plus amples détails sur les développements asymptotiques ont été proposés par Bensoussan, Lions et Papanicolaou [123], Sanchez-Palencia [124], Tartar [125, 126], Jikov, Kozlov et Oleinik [127]. Ces analyses ne feront pas l'objet du présent manuscrit, et par suite les quantités  $(\mathbf{p}^*, A^*)$  calculées sur le domaine relaxé seront notées simplement sans l'exposant étoilé (\*). Néanmoins, nous sommes intéressés par l'application de la méthode d'homogénéisation pour la détermination de la topologie optimale du domaine de conception  $\Omega_v$ .

L'utilisation d'une approche par homogénéisation des matériaux pour l'optimisation topologique a été connue grâce aux travaux de Murat et Tartar [128, 129], Bendsøe, Kikuchi, Suzuki et leurs co-auteurs [130, 131, 51], Hassani et Hinton [132] et surtout avec les contributions de Allaire [133, 81]. Le passage de l'échelle microscopique multi-phase à une échelle macroscopique effective équivalente offre beaucoup plus de degré de liberté aux designers en apportant davantage de solutions aux difficultés rencontrées en optimisation de forme classique telles que : la non-existence de solution, l'impossibilité de variation continue des frontières (difficulté avec les interfaces due à l'extrême hétérogénéité du milieu), manque de justification rigoureuse des résultats de convergence, etc. Désormais, le domaine relaxé obtenu par homogénéisation, est plus vaste et contient à la fois des solutions faites de matériaux purs et aussi de solutions en matériaux composites. De plus, on peut aussi effectuer des calculs de dérivées sans soucis de continuité du domaine d'étude : cela autorise la faisabilité des méthodes basées sur les algorithmes de type gradient. Par la suite, considérons notre problème de conception optimale bi-phase :


 FIGURE 3.5 – Milieu hétérogène  $\varepsilon$ -périodique à deux phases.

lorsque l'on dispose de deux matériaux un faible ou mou et l'autre fort ou solide de paramètre caractéristique à l'échelle microscopique  $\mathbf{p}_{\min}$  et  $\mathbf{p}_{\max}$ <sup>7</sup> respectivement, dans ce cas le problème d'optimisation topologique (3.1) se réduit à la recherche de la distribution optimale de ces matériaux dans  $\Omega_v$  à travers les valeurs des paramètres  $\{\mathbf{p}_{\min}, \mathbf{p}_{\max}\}$  en chaque point  $x$  de  $\Omega$ . Le principe d'homogénéisation consiste à relaxer ce couple de paramètres en considérant continûment toutes les quantités intermédiaires entre  $\mathbf{p}_{\min}$  et  $\mathbf{p}_{\max}$  : c'est-à-dire que l'on travaillera désormais sur le segment  $[\mathbf{p}_{\min}, \mathbf{p}_{\max}]$ . Le domaine d'étude devient plus grande autorisant des formes topologiques admissibles théoriquement qui peuvent ne pas être réalisables en pratique. Cela nécessite l'introduction de deux nouvelles fonctions  $\rho$  et  $g$ , qui seront employées pour paramétrer la répartition du « mélange » désigné par sa propriété caractéristique homogénéisée  $\mathbf{p}$  dans le domaine à topologie variable  $\Omega_v$ . Ainsi, la relation suivante est établie :

$$\mathbf{p}(x) = g(\rho(x)) \in [\mathbf{p}_{\min}, \mathbf{p}_{\max}], \forall x \in \Omega_v. \quad (3.18)$$

Dans (3.18), les fonctions  $g$  et  $\rho$  sont monotones et de même sens de variation (généralement croissantes). En suivant l'idée originale de Bendsøe [134, 52], la fonction  $g$  est appelé *Schéma d'Interpolation de Matériaux* (SIM) ou en anglais *Material Interpolation Scheme* (MIS) ; et on prend la variable fonctionnelle  $\rho$  dans  $[0,1]$ . Avec de telles considérations, le problème inhomogène original devient un

7. Ici, contrairement aux problèmes purement mécaniques, le paramètre  $\mathbf{p}_{\min}$  peut-être pour le matériau mou comme pour le matériau solide. En effet, pour notre problème d'électromagnétisme, en considérant la réductivité magnétique  $\nu$  qui est une propriété caractéristique des matériaux ferromagnétiques, inverse de la perméabilité magnétique  $\mu$ , elle vaut en valeur relative par exemple 1 pour l'air (mou ou vide) et 1/1000 pour le fer.



vrai problème d'optimisation binaire ; où l'on a :

$$\rho(x) \in \{0, 1\}, \forall x \in \Omega_v, \quad \text{tel que :} \quad \rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_{\max}, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_{\min}, \end{cases} \quad (3.19)$$

avec :

- $\Omega_{\max} := \{x \in \Omega_v : \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}_{\max}\},$
- $\Omega_{\min} := \{x \in \Omega_v : \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}_{\min}\},$

et :

$$\Omega_v = \Omega_{\max} \cup \Omega_{\min}. \quad (3.20)$$

Dans ce cas, la fonction  $\rho$  se comporte alors comme une fonction de densité de matériaux dans le modèle homogénéisé car sa valeur  $\rho(x)$  en tout point  $x$  de  $\Omega_v$  indique la proportion de matériau homogène déposé en ce point. De plus, on trouve :

$$\int_{\Omega_v} \rho d\Omega \leq \int_{\Omega_v} \mathbb{1}_{\Omega_{\max}} d\Omega = \text{mes}(\Omega_{\max}). \quad (3.21)$$

La relation (3.21) est très importante car elle permet de prendre en compte la contrainte sur le volume de matériaux utilisés pour le design. Généralement pour éviter des solutions topologiques trop triviales dans  $\Omega_v$  lors de la résolution algorithmique, l'ensemble admissible  $\Omega_{\text{adm}}$  dans (3.1) contient l'inégalité :  $\int_{\Omega_v} \rho d\Omega \leq V_0$ , pour  $V_0$  un volume de matériaux imposé pour le design du dispositif (cela permet indirectement de concevoir des circuits magnétiques pour PEH à poids optimal car masse = masse volumique  $\times$  volume).

Finalement, avec la formulation homogénéisée de (3.1), on cherche une topologie optimale de  $\Omega_v$  dans le sens des densités optimales  $\rho^{\text{opt}}$  sur un maillage fixe de ce domaine d'étude, voir la Figure 3.8.

Si la méthode d'homogénéisation pour l'optimisation topologique semble pratique et simple, lors de son utilisation, on est confronté le plus souvent à des difficultés liées à l'interprétation des valeurs continues de la densité  $\rho$  en terme de matériaux existants. Pour surmonter cela, il est possible de trouver des matériaux isotropes, anisotropes, composites, poreux, laminés ou des structures périodiques qui correspondent ou qui approchent les comportements que devraient avoir la structure ayant une valeur de densités intermédiaires ( $0 < \rho < 1$ ). Ces analyses sont principalement basées sur la résistance des matériaux et la théorie développée par Hashin et Shtrikman [135] qui ont proposé des techniques variationnelles de calcul de bornes des coefficients homogénéisés de ces matériaux (en élasticité ses coefficients sont : coefficient/ratio de Poisson<sup>8</sup>, module de Young<sup>9</sup>, tenseur d'élasticité linéaire/non linéaire, etc). De nos jours, le développement et

8. Siméon Denis Poisson (21 Juin 1781 - 25 Avril 1840) : mathématicien, géomètre et physicien français.

9. Thomas Young (13 Juin 1773 - 10 Mai 1829) : physicien, médecin et égyptologue britannique.

l'élaboration de ces matériaux hybrides à travers la méthode d'homogénéisation, ont beaucoup évolué. En effet, on trouve dans la littérature en plus des papiers cités ci-dessus, d'autres travaux intéressants traitant cette problématique. On peut citer notamment les articles de Cherkaev, Kohn, Lipton, Lurie, Milton et leurs co-auteurs [136]–[142]. Malgré les efforts théoriques fournis en renforçant la technique d'homogénéisation par la théorie des composites, la garantie d'existence de matériaux correspondant à toute les valeurs de la densité continue  $\rho$  dans  $[0, 1]$  reste une *question ouverte*!

De plus, l'utilisation des matériaux perforés ou poreux n'est pas envisageable dans tous les domaines. C'est le cas par exemple en aéronautique ; ou imaginez les ailes d'un avion faite d'une structure poreuse ou grossièrement perforée, ou encore les circuits magnétiques d'un propulseur plasmique en matériaux poreux exposés à des températures extrêmes. Donc, il devient plus que nécessaire de trouver des moyens d'éviter ces valeurs de densité intermédiaire afin d'avoir des designs à topologie optimale avec des matériaux purs ; c'est-à-dire forcer la variable fonctionnelle à prendre les valeurs zéro ou un (« black-and-white » design/binary solution). Par suite, il a été proposé dans la littérature des choix sur la fonction auxiliaire SIM  $g$  pour remédier au problème. L'utilisation de ces fonctions SIM permettant de pallier aux problèmes des densités composites à donner naissance à une nouvelle approche connue sous le nom *SIMP method*.

### 3.3.4 Méthode SIMP

La méthode SIMP a été introduite en optimisation topologique par Bendsøe sous les noms « *direct approach* » (approche directe), « *fictitious material model* » (modèle de matériau fictif), « *artificial material approach* » (l'approche de matériaux) [51, 134, 52]. Cette approche dite *directe* est une variante de la méthode d'homogénéisation. Mais contrairement à la méthode d'homogénéisation où beaucoup d'efforts sont effectués pour établir l'existence et l'élaboration de matériaux composites induits par la moyennisation des propriétés microscopiques des matériaux utilisés pour le design, cette nouvelle approche se focalise plutôt sur *comment prévenir l'apparition des densités intermédiaires* dans la densité optimale  $\rho^{\text{opt}}$  (trouvée par le processus d'optimisation<sup>10</sup>). Bendsøe proposa une formulation polynomiale pour le schéma d'interpolation de matériaux (SIM)  $g$  dans l'équation (3.18) comme suit :

$$\mathbf{p}(x) = f_n^c(\rho(x)) = \mathbf{p}_{\min} + (\mathbf{p}_{\max} - \mathbf{p}_{\min})[\rho(x)]^n, \forall x \in \Omega. \quad (3.22)$$

La relation (3.22) est connue dans la littérature sous l'appellation de *power-law* que j'appellerai *formulation polynomiale classique* dans tout ce qui suit sauf indication contraire (car nous proposerons de nouvelles formulations généralisées). En utilisant la formulation (3.22), l'idée est de rendre non attractives les densités intermédiaires en les *pénalisant* grâce à des valeurs relativement élevées de l'exposant  $n$  dans la formule (3.22). En effet, comme la fonction  $\rho$  est à valeur dans

10. Surtout pour les approches algorithmiques continues de descente qui sont efficaces en général même pour les problèmes de grande taille, de plus il faut que l'on garde cette relaxation continue obtenue grâce à l'homogénéisation afin de toujours bénéficier des justifications rigoureuses de ce concept mathématique puissant.



$[0, 1]$ , augmenter le degré  $n$  du polynôme  $g_n$  permettrait de répartir les valeurs de la densité entre les valeurs “0” et “1” ; c’est-à-dire que cela favoriserait l’obtention de solutions binaires : c’est pourquoi l’exposant  $n$  est appelé *facteur* ou *degré* de pénalisation. Ce paramètre nous donne ainsi une sorte de contrôle sur l’apparition de densités intermédiaires donc de matériaux composites dans la topologie optimale (voir une illustration sur la Figure 3.6). C’est alors que l’approche a été par la suite désignée par l’acronyme SIMP par Rozvany en 1992 [53] qui donna la signification **S**olide **I**sotropic **M**icrostructure with **P**enalization (for intermediate densities). Par la suite Bendsoe donna la définition suivante **S**olid **I**sotropic **M**aterial with **P**enalization (for intermediate densities). Cette dernière définition est la plus utilisée dans la littérature car cela correspond en fait à l’idée originale de l’auteur [134, 52] et c’est celle que l’on retiendra dans ce manuscrit. En effet, le modèle SIMP a pris forme suite aux difficultés rencontrées lors de l’implémentation numérique de l’approche initiale d’homogénéisation pour le design optimal [130]. Bendsoe et Kikuchi furent parmi les pionniers à mettre en pratique l’homogénéisation pour l’optimisation topologique numérique. Le principe de la méthode consiste à travailler avec l’échelle macroscopique obtenue après homogénéisation. Puis sur un maillage fixe (typiquement des éléments finis) doit être déterminée la distribution optimale de matériaux isotrope dans chaque cellule du domaine discret à travers la valeur densité  $\rho$ . A ce stade, introduire des considérations microscopiques des structures cellulaires du milieu rendrait le problème beaucoup plus complexe voire même impossible à résoudre (surtout numériquement) car il n’y aurait plus d’harmonie, ni de continuité, ni de linéarité du milieu. De plus il faudrait considérer l’orientation et la forme géométrique de chaque micro-phase (ce qui implique naturellement l’ajout de nouvelles variables dans le problème) [131, 132, 81, 144, 145, 147]. Du coup, on revient sur les difficultés résolues avec l’application de la méthode d’homogénéisation (ce qui serait dommage).

C’est pourquoi ce modèle est connu comme étant une variante de la méthode d’homogénéisation, que l’on peut résumer comme suit :

SIMP  $\leftarrow$  Homogénéisation + Pénalisation des composites.

De plus, le schéma d’interpolation classique  $f_n^c$  utilisé pour contraindre les densités  $\rho$  à prendre des valeurs discrètes “0-1” (dans chaque cellule du maillage du domaine de conception à topologie variable  $\Omega_v$ ) dérive aussi de la combinaison linéaire<sup>11</sup> par relaxation du couple  $\{\mathbf{p}_{\min}, \mathbf{p}_{\max}\}$  au segment  $[\mathbf{p}_{\min}, \mathbf{p}_{\max}] := [\theta \mathbf{p}_{\min} + (1 - \theta) \mathbf{p}_{\max} : 0 \leq \theta \leq 1]$  (interpolation couramment utilisée en *analyse convexe*).

Au début des années 80, le modèle SIMP était peu apprécié car il ne présentait pas de justification rigoureuse quant à l’interprétation des densités intermédiaires présentes dans la structure optimale obtenue. C’est alors que ce modèle fut considéré comme une méthode dite de matériaux fictifs/artificiels ; de plus les résultats obtenus dépendaient fortement du maillage utilisé [132, 148]. Récemment des travaux ont montré la possible élaboration de structure composite correspondant aux

11. C’est le cas lorsque  $n=1$  dans la formulation (3.22),

$$\mathbf{p} = g_n(\rho) = \mathbf{p}_{\min} + (\mathbf{p}_{\max} - \mathbf{p}_{\min})\rho, \quad \forall \rho \in [0, 1].$$

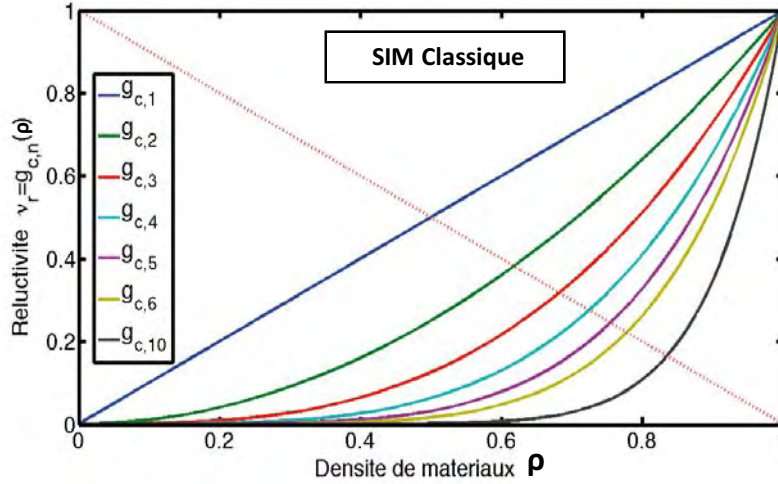


FIGURE 3.6 – SIM classique noté par  $g_{c,n}(\rho) = \nu_r(\rho) = \nu_{\min} + (\nu_{\max} - \nu_{\min})\rho^n$ , avec  $\nu_r$  la réductivité relative,  $\nu_{\min} = 1/1000$  et  $\nu_{\max} = 1$ .

valeurs de  $\rho$  dans  $]0, 1[$ . En général, cela dépend du domaine d'application et des propriétés effectives des matériaux de conception. Par exemple dans [52] sur le problème d'optimisation topologique de mécanique, Bendsøe et Sigmund utilisent le concept des bornes variationnelles sur les propriétés effectives des composites de Hashin et Shtrikman, et proposent des conditions et des solutions pour la faisabilité des topologies optimales contenant des valeurs intermédiaires ; Ces conditions regroupent le facteur de pénalisation  $n$  et le ratio de Poisson  $\nu^0$  dans les inégalités constitutives suivantes :

$$\begin{aligned} n &\geq \max \left\{ \frac{2}{1-\nu^0}, \frac{4}{1+\nu^0} \right\} && \text{en dimension 2,} \\ n &\geq \max \left\{ \frac{15(1-\nu^0)}{7-5\nu^0}, \frac{3(1-\nu^0)}{2(1-2\nu^0)} \right\} && \text{en dimension 3.} \end{aligned} \quad (3.23)$$

La Figure 3.7 (de [52]) montre des conceptions de microstructures obtenues grâce à l'interprétation des densités intermédiaires issues d'un algorithme d'optimisation utilisant la méthode SIMP, pour plus détails voir les documents [134, 52].

De nos jours la méthode SIMP est la plus utilisée pour l'optimisation topologique à cause de sa simplicité d'implémentation et de sa facilité de couplage avec d'autres procédures ou techniques d'optimisation numérique. De plus, elle est destinée par essence à l'obtention de solutions plus proches d'un design discret usinable. C'est ce qui explique l'engouement des chercheurs et des industriels pour cette méthode. De nombreux logiciels commerciaux d'optimisation topologique utilisent aussi cette approche de densité de matériaux suivie de pénalisation (tels que : OPTISTRUCT, ALTAIR, TOPOPT, TOSCA, ...). C'est cette approche que nous avons aussi choisie pour résoudre notre problème de conception de circuits magnétiques pour propulseurs électriques. Contrairement à certaines applications où les matériaux composites sont acceptés, notre application en électromagnétisme n'autorise pas de telles structures.

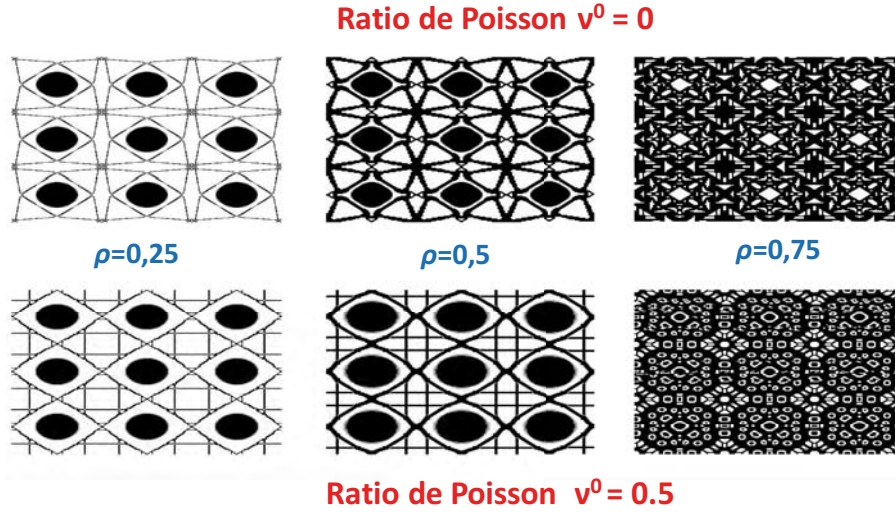


FIGURE 3.7 – Conception micro-structurale de matériaux composites obtenue par le mélange de vide (région en blanc) et de matériau solide isotrope linéaire (région en noir) avec un modèle SIMP de facteur de pénalisation  $n = 4$  pour la formulation classique : le ratio de Poisson  $\nu^0$  est choisi égal à 0 et 0,5 pour différentes valeurs de densité  $\rho = \{0,25; 0,5; 0,75\}$ .

### 3.4 Formulation du Problème de Conception de PEHs pour le Modèle SIMP

En utilisant les relations (3.18) et (3.22), un changement de variables est effectué entre le paramètre des propriétés des matériaux et des sources de conception  $\mathbf{p}$  et la fonctionnelle de densité  $\rho$ . Cela se fait sans difficulté majeure car par construction les schémas d'interpolation  $\{g_n : [0, 1] \rightarrow [\mathbf{p}_{\min}, \mathbf{p}_{\max}], \rho \mapsto g_n(\rho)\}$  liant  $\mathbf{p}$  et  $\rho$  sont choisis de manière à ce qu'ils soient des difféomorphismes pour toutes les valeurs du degré de pénalisation  $n$ . Cette paramétrisation continue du domaine de conception avec les fonctions composées  $g_n \circ \rho$  se distingue de celles utilisées en optimisation de forme classique. En effet, les fonctions paramétriques contrôlent les variations des frontières libres du domaine sans modifier la connectivité de celui-ci (préservant ainsi la topologie initiale). Mais en optimisation topologique avec l'approche SIMP, elles contrôlent la répartition des densités de matériaux et des sources à l'intérieur de chaque maille du domaine étudié (cela conduit à des changements de topologie car dans ces problèmes de conception optimale, le plus souvent, on a l'équivalence : Absence de Matériau  $\Leftrightarrow$  Insertion de Trou, d'où le nombre de trous dans le domaine  $\Omega_v$  qui va être celui des points qui auront zéro comme valeur de densité). Ainsi, on exprime toutes les équations du problème en fonction de la seule variable  $\rho$ , et les champs magnétiques sont aussi calculés en fonction de  $\rho$ . Par conséquent, la densité des matériaux  $\rho$  devient notre variable de conception optimale et l'on pose :  $\mathcal{B}(\rho) = \mathbf{B}(A(\rho))$  qui est l'induction du champ magnétique associé.

Ensuite, en vue de la résolution numérique, le domaine est discrétisé et chaque

cellule de  $\Omega_v$  constitue une variable d'optimisation du problème, on pose alors :  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, \rho_N)$ , avec  $N$  le nombre de subdivisions de  $\Omega_v$ , voir la Figure 3.8. De même, les EDPs modélisant les états primal et adjoint du problème sont exprimées en fonction de la densité. Finalement, le problème  $(\wp)$  peut-être reformulé de manière discrète comme suit :

$$(\wp_\rho) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\rho \in \mathbb{R}^N} F(\rho) = \int_{\Omega_T} ||\mathcal{B}(\rho) - \mathbf{B}_0||^2 d\Omega, \\ \text{s.c. :} \\ h_A(\rho) = 0, \text{ dans } \Omega, \\ h_\lambda(\rho) = 0, \text{ dans } \Omega, \\ \sum_{i=1}^N \rho_i v_i = \rho^T v = V_0. \\ 0 \leq \rho \leq 1. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.24) \\ (3.25) \\ (3.26) \\ (3.27) \\ (3.28) \end{array}$$

Où :

- les équations (3.25) et (3.26) sont les formulations correspondantes aux problèmes primal et adjoint respectivement,
- $v = (v_1, \dots, v_N)$  est le vecteur représentant les volumes<sup>12</sup> élémentaires de chaque cellule, voir par exemple la Figure 3.8.

Dans le cas d'un maillage régulier uniforme, les volumes élémentaires  $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont tous égaux ; l'égalité (3.27) peut alors être normalisée, elle devient alors :

$$\sum_{i=1}^N \rho_i = v_0, \text{ avec } v_0 = V_0/v_1. \quad (3.29)$$

Avec la loi de dérivation des fonctions composées, la sensibilité de  $(\wp_\rho)$  par rapport à la nouvelle variable de conception  $\rho$  est donnée par :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \int_{\Omega_v} \frac{\partial g}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial J}{\partial g} \lambda + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial g} \mathbf{B}(\lambda) - \frac{\partial \nu}{\partial g} \mathbf{B}(A) \mathbf{B}(\lambda) \right] d\Omega, \quad (3.30)$$

avec  $g$  le SIM choisi pour la paramétrisation du domaine de conception.

L'intégrale de la fonction coût de  $(\wp_\rho)$  dans l'équation 3.24 se calcul de manière approchée numériquement sur un maillage rectangulaire uniforme de la zone cible  $\Omega_T$ , voir les Figures 3.8 et 3.9.

### 3.5 Résolution Numérique : le code d'Optimisation Topologique ATOP<sup>T0</sup>

Pour la résolution numérique des problèmes d'optimisation structurale, il existe plusieurs algorithmes dans la littérature qui peuvent-être spécifiques aux problèmes

12. Rigoureusement, c'est en 3D que les  $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont effectivement des volumes cellulaires associés aux mailles. Dans notre modèle réduit 2D, on a gardé le terme volume pour désigner ces quantités qui sont en réalité des surfaces élémentaires des mailles (c'est cette appellation qui est aussi couramment employée dans la littérature, voir par exemple [51]).

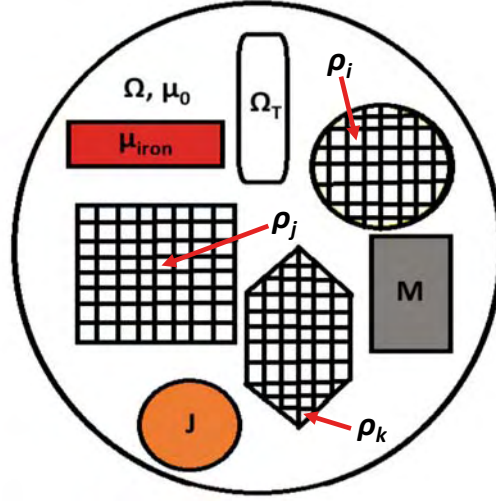


FIGURE 3.8 – Domaine topologique variable  $\Omega_v$  discrétisé pour l'approche SIMP, chaque cellule est une variable de design tels que  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, \rho_N)$ , avec  $N$  le nombre total de mailles.

de mécanique [51, 52, 53, 54, 81, 132, 133, 148] et d'électromagnétisme [149, 150, 85, 86, 87]. La majeure partie des solveurs connus et robustes pour le design sont dédiés à la résolution des problèmes en mécanique. En ce qui concerne les autres applications, notamment en électromagnétisme, il revient le plus souvent aux designers de développer leurs propres algorithmes heuristiques afin d'avoir des solutions réalisables. De plus, dans le domaine de la propulsion électrique spatiale, il n'existe pas de telles approches pour la conception automatisée des circuits magnétiques. Les circuits utilisés dans la configuration des moteurs actuels ont été majoritairement conçus empiriquement (par « essai-erreur »). Ainsi, la mise en place et le développement d'outils servant à la configuration de la topologie magnétique et architecturale des propulseurs plasmiques, est plus que jamais nécessaire. C'est l'une des motivations fondamentales de ce travail, et dans cette section nous présenterons notre démarche en détails comprenant l'architecture et le principe de fonctionnement de notre code d'optimisation topologique pour les circuits magnétiques par résolution de problème inverse d'électromagnétisme.

### 3.5.1 Outils de Calculs

Nous avons choisi de construire un code d'optimisation topologique sous le nom ATOP<sup>T0</sup> (**A**lgorithm **T**o **O**ptimize **P**ropulsion using **T**opology **O**ptimization). ATOP<sup>T0</sup> est basé sur le modèle SIMP utilisant la sensibilité topologique (3.30) dans les algorithmes numériques de type gradient. Nous utilisons principalement deux logiciels de calculs bien connus dans la communauté scientifique à savoir MATLAB<sup>13</sup> (MATrix LABoratory) développé par la société MathWorks [151] et FEMM 4.2<sup>14</sup> (Finite Element Method Magnetics version 4.2) développé par David Meeker [152].

13. C'est un logiciel payant disponible sous tous les systèmes d'exploitation [151].

14. C'est un logiciel libre disponible uniquement sous window [152].



Ces logiciels rendent notre travail beaucoup plus flexible et exploitable par des ingénieurs. De plus, ces choix se sont imposés indirectement car dans le domaine de la conception de propulseurs électriques la majeure partie des travaux sur le plan national et international (articles, thèses, plan d'expérience, voir notamment les références présentées au Chapitre 1 sur la propulsion spatiale) est réalisée dans ces environnements. FEMM sert à résoudre les équations de Maxwell-Ampère qui constituent les contraintes du problème d'optimisation (notamment dans le modèle  $(\varphi_\rho)$  les égalités (3.25) et (3.26)). Cet outil de calcul par la méthode des éléments finis en 2D, dispose d'un panel de fonctionnalités permettant la prise en charge de plusieurs classes de problème d'électromagnétisme avec différents types de systèmes de coordonnées spatiales. Ainsi, nous avons interfacé FEMM avec MATLAB pour la partie optimisation du code. En particulier, nous exploitons la toolbox d'optimisation de MATLAB à travers la fonction *fmincon* dédiée à l'optimisation avec contraintes. Nous savons qu'il existe d'autres logiciels

(par exemple : SCILAB, FreeFem++, ANSYS, Maxwell, Flux, ABAQUS, COMSOL, NX Nastran, MSc Nastran, QuickField, etc) pouvant aussi être utilisés dans notre travail. Mais, le bon compromis pour faciliter l'échange de données entre chercheurs et ingénieurs en ce qui concerne ces problèmes de configuration des propulseurs à effet Hall est l'utilisation de ces outils de calculs scientifiques. De plus, leur précision sur les calculs de champs électromagnétiques conviennent à l'application considérée, et les circuits optimaux obtenus peuvent-être exportés sous forme d'exécutables pouvant servir à d'autres types de simulation dans le cadre du développement et de l'élaboration des propulseurs (telle que : le mouvement plasmique à l'intérieur du moteur). Ce qui fait que la difficulté n'est pas le choix de logiciels de calculs mais plutôt leur utilisation par des ingénieurs ou autres collaborateurs qui ont ces logiciels à leur disposition pour réaliser les simulations numériques.

### 3.5.2 Système de Maillages Utilisés

Le maillage d'un domaine à étudier en analyse numérique est d'une grande importance. Cela est d'autant plus fondamental que la qualité du maillage effectué pour l'approximation numérique influence la qualité de la solution obtenue. D'où, dans la plupart des modèles mathématiques, le raffinement de la discrétisation du domaine d'étude implique une bonne précision sur les valeurs numériques calculées (en général). Dans le solveur ATOP<sup>T0</sup>, nous utilisons deux systèmes de maillage correspondant aux deux niveaux de résolution du problème :

1. *Au niveau du calcul des champs magnétiques :*

Pour le calcul des vecteurs potentiels, et du champ magnétique, on utilise un maillage fin pour une meilleure précision sur les valeurs de champs calculés suivant la tolérance requise pour le bon fonctionnement du dispositif à concevoir, que l'on impose directement dans un script qui doit-être lu par FEMM. Ce maillage triangulaire est fait dans le domaine entier  $\Omega$ , voir la Figure 3.9, d'autres exemples se trouvent dans [152].

2. *Au niveau des variables d'optimisation :*

Pour la résolution du problème d'optimisation, on emploie une discrétisation plus grossière par rapport au précédent cas. Ce maillage est effectué

uniquement dans la zone variable  $\Omega_v$  et le nombre de ses cellules  $N$  est la dimension/taille du problème discret d'optimisation topologique ( $\rho_\rho$ ), voir aussi les Figures 3.8 et 3.9. En pratique, une subdivision uniforme du domaine variable  $\Omega_v$  est utilisée car dans ce cas les cellules élémentaires obtenues ont la même surface. Par la suite, c'est l'expression simplifiée (3.29) qui sera implémentée dans le programme ATOP<sup>T0</sup>. Il est possible de raffiner ce maillage à souhait à la limite de la capacité des supports et ressources informatiques disponibles pour réaliser les simulations et garantir la robustesse de l'algorithme d'optimisation choisi. Il est à noter aussi que plus le domaine  $\Omega_v$  sera maillé finement, plus il y aura de variables d'optimisation et plus la complexité de résolution numérique augmente. L'avantage c'est que la solution optimale obtenue présentera une topologie beaucoup plus précise. Le calcul numérique de l'intégrale définissant le critère sur  $\Omega_T$  se fait aussi sur un maillage indépendant mais similaire à celui de  $\Omega_v$  (sauf que le maillage de  $\Omega_T$  n'entre pas dans les composantes de la variable  $\rho$ ), voir la Figure 3.9.

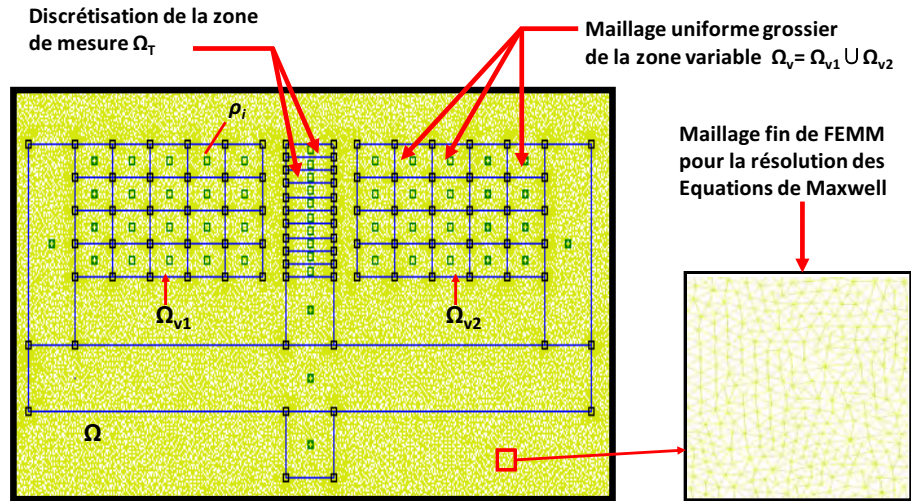


FIGURE 3.9 – Représentation graphique du domaine étudié  $\Omega$  sous FEMM montrant le système de maillage utilisé pour la conception optimale avec ATOP<sup>T0</sup>.

Cette distinction entre la discrétisation globale du domaine  $\Omega$  pour les calculs par éléments finis et celle de la zone à topologie variable  $\Omega_v$  est une originalité pour la résolution d'un problème d'optimisation topologique par la méthode SIMP. Cependant, ce type d'adaptation de maillage grossier existe en optimisation de forme géométrique, où un maillage fin est employé pour le calcul des grandeurs physiques du problème par éléments finis et un maillage grossier pour le suivi des frontières du domaine [153]. En général, pour l'optimisation topologique par la méthode de la densité, le maillage des éléments finis du domaine entier est celui qui donne la taille du problème. Ceci même s'il y a des zones où la distribution de matériaux est déjà connue [154]. Cela complexifie inutilement le problème car il faudrait manipuler un vecteur variable du problème d'optimisation ayant certaines composantes déjà connues donc fixées à l'avance. Cela alourdi les processus d'optimisation ce qui

peut être évité en procédant comme expliquer ci-dessus. De plus, dans le cadre spécifique du problème inverse de conception des propulseurs, cela présente un grand intérêt à cause de la cartographie magnétique  $\mathbf{B}_0$  imposée dans la zone cible  $\Omega_T$ . En effet, la topographie magnétique donnée peut être issue d'une autre simulation numérique notamment par un ingénieur spécialiste de la propulsion spatiale. Ainsi, pour avoir les mêmes échelles et précisions de calcul avec les mêmes outils, il faudra aussi utiliser les mêmes maillages pour calculer le champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Dans ce cas la minimisation de l'écart  $\|\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}\|$  (dans la region  $\Omega_T$ ) a un sens.

### 3.5.3 Principe de Fonctionnement du code ATOP<sup>T0</sup>

Notre programme d'optimisation topologique pour la résolution du problème inverse d'électromagnétisme peut-être décrit de la manière suivante :

#### Etape 1 : Définition du Cadre de Travail,

Après avoir choisi un problème de conception de circuit magnétique et posé le modèle mathématique correspondant, on se pose maintenant la question : comment traiter notre problème avec l'outil choisi **FEMM**. Il faut alors définir le cadre de résolution du problème, c'est-à-dire que l'on doit donner :

- le type de problèmes d'électromagnétisme : magnéto-statique, magnéto-harmonique, électrostatique, électrodynamique, . . . .
- les conditions aux limites des EDPs définissant le modèle : Dirichlet, Neumann, Mixte (ou de Robin<sup>15</sup>), . . . .
- le système de coordonnées utilisées : cartésien, cylindrique.
- les unités de mesure des dimensions géométriques définissant le domaine d'étude : millimètre (mm), centimètre (cm), mètre (m).
- la librairie des matériaux et sources magnétiques utilisés pour le design : air, fer, aimant, courant (bobine), céramique, . . . .
- le comportement intrinsèque des matériaux magnétiques : linéaire ou non linéaire.
- la précision des calculs par le solveur : la taille des mailles, l'angle minimum des angles des triangles élémentaires (du maillage des éléments finis), . . . .

Ainsi, tous les paramètres par défaut du logiciel doivent être contrôlés afin de vérifier la correspondance par rapport à nos exigences. Par ailleurs en cas de traitement de données provenant d'un tiers, il faut s'assurer que l'on travaille dans le même cadre. Une liste complète des cadres d'études pris en charge par **FEMM** se trouve dans [152].

#### Etape 2 : Description de la topologie générale et initiale du domaine

D'abord, on décrit la topologie de tous les sous-domaines de  $\Omega$  (on doit préciser si le sous-domaine considéré est : un secteur d'un disque, un rectangle, une plaque ellipsoïdale, . . .). Ensuite, on donne les dimensions géométriques du domaine d'étude  $\Omega$ , ainsi que celles de ses sous-domaines, notamment

---

15. Victor Gustave Robin (17 Mai 1855 - 1897) : mathématicien français, professeur de mathématiques appliquées à la Sorbonne.



la zone cible  $\Omega_T$ , les zones à topologie variable formant  $\Omega_v$ , la position des zones contenant les sources de champ magnétique. Avec ces dimensions géométriques on définit la position du centre de chaque région du domaine de conception qui servira de repère (associé à chaque région).

Ensuite, lorsqu'il existe, le domaine correspondant à l'état adjoint du problème est défini. Soulignons que les EDPs (3.25) et (3.26) sont résolues avec les mêmes caractéristiques géométriques du domaine  $\Omega$ , en particulier avec des paramètres identiques à ceux donnés dans l'**Etape 1** (les systèmes de coordonnées, les unités de mesure, les maillages, etc). De plus, les deux domaines présentent la même topologie en terme de distribution de matériaux notamment les parties ferromagnétiques. Cependant, la source de champ magnétique de l'état l'adjoint (3.26) est obtenue par la conversion de la différentielle du résidu  $\|\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}\|^2$  en un aimant fictif  $\mathbf{M}_a$  (voir de plus amples détails dans la section d'interprétation physique de l'état adjoint exposé dans la section 2.5.6 du Chapitre 2).

Enfin, on précise la nature topologique du problème en terme de distribution de matériaux et sources de chaque zone du domaine. Il s'agit de dire dans chaque zone, lesquelles des composantes du paramètre  $\mathbf{p} = \{\mu, \mathbf{M}, \mathbf{J}\}$  sont fixes (celles dont les valeurs sont données dans le cahier des charges), et lesquelles sont variables (dont les répartitions optimales sont à déterminer). Dans chaque zone à topologie variable, les bornes  $\mathbf{p}_{\min}$  et  $\mathbf{p}_{\max}$  sont fixées en fonction du type de matériaux. Dans la version actuelle du programme ATOP<sup>T0</sup>, dans chaque zone variable, une seule parmi les composantes de  $\mathbf{p}$  doit être libre (c'est-à-dire variable). Ensuite le maillage pour l'optimisation des différentes zones de  $\Omega_v$  est défini. Enfin un SIM avec un facteur de pénalisation  $n$  noté par  $g_n$  est aussi choisi pour le paramétrage de distribution du matériau dans le domaine  $\Omega_v$  (donnant la relation  $\mathbf{p} = g_n(\rho)$ ). Déjà, à cette étape, un design topologique initial peut être choisi à travers un vecteur  $\mathbf{p}^0$  (il existe une densité initiale correspondante  $\rho^0$  tel que  $\rho^0 = g_n^{-1}(\mathbf{p}^0)$ , qui devra être choisie à l'étape suivante pour le module d'optimisation).

Par ailleurs, sous **FEMM**, une hypothèse simplificatrice des propriétés des matériaux dans les différentes régions est utilisée (qui est donnée dans le Tableau 3.1). Dans le cas de matériaux ferromagnétiques non linéaires une courbe d'hystérésis  $\mathbf{B}$ - $\mathbf{H}$  est employée pour caractériser ces matériaux. Mais, nous travaillerons sans saturation, le module de l'induction magnétique  $\|\mathbf{B}\|$  n'excèdera pas 0.5T, avec des matériaux homogènes et linéaires. De plus, en ce qui concerne la cartographie magnétique du champ au centre du PEH, son module est de quelques centaines de Gauss ( $\sim 150\text{G} = 0.015\text{T}$ ).

### Etape 3 : Module d'optimisation

Le code proposé pour le design optimal des circuits est flexible dans le sens où l'on a la possibilité d'utiliser quasiment tous les algorithmes existants dans la littérature. De manière générale, dans les problèmes de mécanique, les algorithmes les plus utilisés sont la méthode des asymptotes mobiles MMA (Method of Moving Asymptotes), l'approximation convexe des contraintes non linéaire CONLIN (CONvex LINearization), la méthode

Matériaux	Perméabilité	Densité de Courant	Rémanence
Air (vide)	$\mu_0$	0	0
Ferromagnétique	$\mu_0\mu_r$	0	0
Bobine (cuivre)	$\mu_0$	<b>J</b>	0
Aimant permanent	$\mu_0$	0	<b>B<sub>r</sub></b>

TABLE 3.1 – Définition des propriétés des matériaux (y compris les sources) dans les différentes zones du domaine d’étude sous FEMM. Avec  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m, la perméabilité absolue du vide (qui est la même que celle de l’air), la perméabilité magnétique et la densité de courant s’expriment en H/m et A/m<sup>2</sup> respectivement.

du critère d’optimalité OC (Optimality Criteria) [53, 54, 51, 158, 155, 156]. Cependant, d’autres algorithmes d’optimisation locale utilisant le gradient topologique (3.30) ont été privilégiés dans notre module d’optimisation. Les principaux algorithmes déterministes d’optimisation locale sont : les algorithmes de Newton, Active-set, SQP, Interior-Points Method, etc. Ces algorithmes sont disponibles dans la toolbox d’optimisation de MATLAB. Néanmoins, il est possible de se servir dans ATOP<sup>TO</sup> de ses propres algorithmes (si nécessaire).

Dans ce suit, on appellera *solution fabricable*, une solution topologique pour laquelle les composantes de la variable de la densité  $\rho$  correspondante sont assez proche de 0 ou 1 (c’est-à-dire proche d’une solution binaire que l’on cherche). Ainsi, on fera une *analyse de la solution en terme de fabrication*.

#### Etape 4 : Analyse de la solution en terme de fabrication

Cette étape ressemble à ce que l’on appelle le plus souvent dans la littérature ou chez les designers *post-processing*. C’est dans cette phase de post-résolution que l’on va décider de la qualité de la topologie optimale continue incluant la procédure d’extraction d’une vraie solution discrète. En effet, en toute généralité, en résolvant le problème continue ( $\wp_\rho$ ), il est assez difficile d’avoir des solutions binaires, comme on pourrait le souhaiter en réalité ; et cela malgré une forte valeur du facteur de pénalisation  $n$  que l’on utilise avec  $g_n$  dans la méthode SIMP. Contrairement à la démarche classique qui consiste à supprimer de manière arbitraire et empirique les densités intermédiaires de la solution optimale  $\rho^{\text{opt}}$  ( $0 < \rho_i^{\text{opt}} < 1, i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ), dans ATOP<sup>TO</sup>, nous procédons d’une façon originale et assez rationnelle. En effet, pour le post-process à partir d’une solution continue, l’élimination des valeurs de densités continues se fait en partie à l’aide du module d’optimisation. Cette technique d’élimination de ces densités continues consiste à utiliser la solution topologique composite  $\rho^{\text{opt}}$  comme point de départ dans le module d’optimisation de la manière suivante : soient  $\mathbb{P}_n$  une partie finie de  $\mathbb{N}^*$ , **AlgoOpt**(Problème Modèle,  $\rho^0, n$ ) une présentation du module d’optimisation ayant comme argument un problème modèle (à résoudre), un facteur de pénalisation  $n$  et un design topologique initial  $\rho^0$ , alors notre procédé

d'élimination des densités intermédiaires peut-être donné par l'algorithme 1.

Une description de l'Algorithme 1 peut être donnée comme suit :

- ◇ *un ensemble  $\mathcal{S}_B$*  : c'est un sous-ensemble de  $[0, 1]^N$  servant à vérifier l'écart entre chaque composante de la solution continue  $\rho^{\text{opt}}$  de 0 et 1. Comme on n'utilise pas des algorithmes d'optimisation combinatoire (en général), il reste donc difficile d'avoir des solutions binaires. Alors, l'ensemble  $\mathcal{S}_B$  est défini à une tolérance  $\varrho$  près des designs topologiques discrets (typiquement  $\varrho \in [10^{-3}, 10^{-1}]$ ) par :

$$\mathcal{S}_B = \{ \rho \in [0, 1]^N : \max(\rho_i, 1 - \rho_i) < \varrho, \text{ pour } i = 1, \dots, N \}. \quad (3.31)$$

- ◇ *une fonction de perturbation  $f_p$*  : c'est une fonction que l'on utilise pour forcer le problème à converger davantage vers des designs binaires. En général, pour cela, on utilise des *fonctions stables* sur le segment  $[0, 1]$ . En particulier dans les tests numériques, on a utilisé la fonction suivante :

$$f_p : [0, 1] \longrightarrow [0, 1], \quad \rho \longmapsto f_p(\rho) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\pi\rho)]. \quad (3.32)$$

La fonction  $f_p$  définie dans (3.32) a été proposée par Allaire dans [81], pour pénaliser les solutions optimales composites. Cette fonction permet de faire converger les valeurs inférieures à 1/2 vers 0 et les valeurs supérieures à 1/2 vers 1 (ces relations sont strictes car 1/2 est un point fixe de cette fonction). De plus, en faisant la mise à jour du point initial  $\rho^0$  avec la solution optimale  $\rho^{\text{opt}}$  à travers une fonction  $f_p$ , on perturbe un peu le design obtenu en le contraignant à converger vers une solution binaire. Cela permet aussi à l'algorithme d'ATOP<sup>T0</sup> d'effectuer de plus amples recherches en ne s'arrêtant pas forcément sur le premier optimum local trouvé.

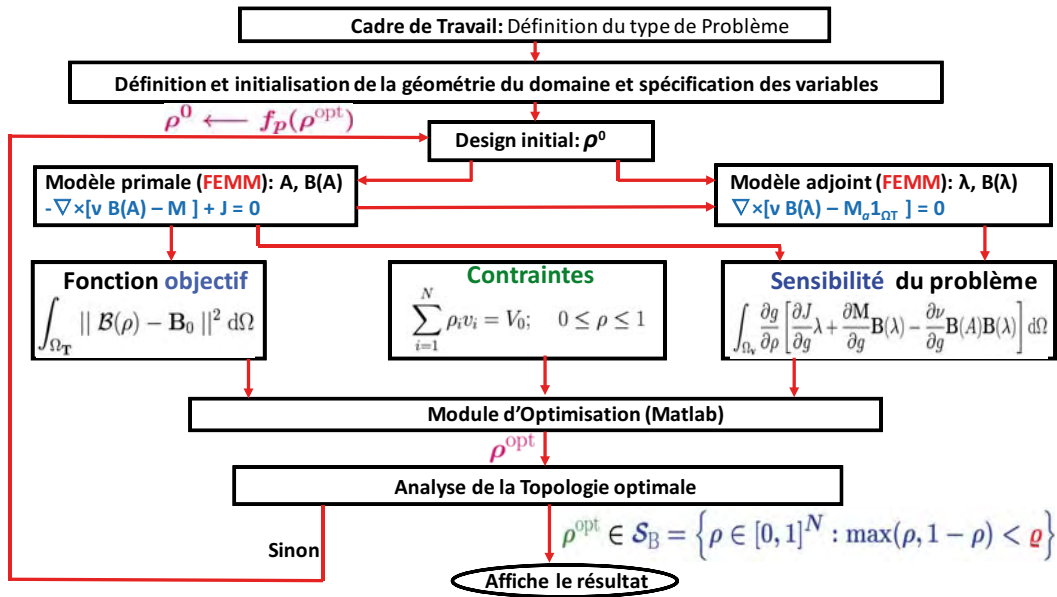
Le principe de fonctionnement de notre programme de conception optimale ATOP<sup>T0</sup> peut être résumé par le schéma 3.10.

## 3.6 Applications Numériques

Dans cette section, notre technique d'optimisation topologique basée sur l'approche de densité de matériaux avec le code ATOP<sup>T0</sup> sera validée sur des exemples concrets. Les problèmes considérés sont des problèmes inverses qui consistent à déterminer un circuit magnétique que l'on appellera circuit de « Gauss » car le champ donné  $\mathbf{B}_0$  dans la zone cible  $\Omega_T$  est une courbe de Gauss suivant la composante  $y$  tandis que sa composante en  $x$  est nulle, voir la Figure 3.12. Les difficultés rencontrées avec l'utilisation de l'approche SIMP pour le design optimal seront aussi présentées. Dans ces résultats numériques, les cellules en rouge désigneront les points matériels (partie ferromagnétique) du domaine de conception  $\Omega_v$  et les cellules bleues désigneront les zones d'air (vide). Pour ces premiers tests numériques, deux SIMs ont été employés à savoir : la fonction polynomiale classique (

**Algorithme 1** Optimisation et Pénalisation des Densités Intermédiaires

- 1:  $\varpi = 1$ ; {C'est un entier naturel qui permet de parcourir les composantes d'un vecteur  $\mathbb{P}_n$  contenant les valeurs du degré de pénalisation choisie pour le design optimal.}
- 2:  $n = \mathbb{P}_n(\varpi)$ ; {C'est le degré de pénalisation initiale.  $n$  est alors la première composante de  $\mathbb{P}_n$ .}
- 3:  $\wp_\rho \leftarrow$  Problème Modèle; {C'est le problème de conception de circuits magnétiques à traiter.}
- 4:  $\rho^0 \in [0, 1]$ ; {C'est le point de départ pour l'algorithme d'optimisation.}
- 5:  $\rho^{\text{opt}} := \text{AlgoOpti}(\wp_\rho, \rho^0, n)$ ; {Résolution du problème avec les données initiales. AlgoOpti est le programme d'optimisation utilisé pour la résolution numérique.}
- 6: **tantque**  $\rho^{\text{opt}} \notin \mathcal{S}_B$  et  $\varpi \leq \text{longueur}(\mathbb{P}_n)$  **faire**  
 {Vérification de la contrainte sur la solution discrète à  $\varrho$  près. De plus, la longueur du vecteur  $\mathbb{P}_n$  est prise en compte pour éviter l'exécution en boucle infinie du programme.}
- 7:  $\varpi \leftarrow \varpi + 1$ ;
- 8:  $n \leftarrow \mathbb{P}_n(\varpi)$ ; {la nouvelle valeur du facteur de pénalisation qui sera utilisée dans l'étape suivante dans le but de pénaliser davantage les valeurs composites.}
- 9:  $\rho^0 \leftarrow f_p(\rho^{\text{opt}})$ ; {Perturbation de la solution continue comme décrit dans l'équation (3.32) et mise à jour du point de départ.}
- 10:  $\rho^{\text{opt}} := \text{AlgoOpti}(\wp_\rho, \rho^0, n)$ ; {Module d'optimisation résolvant le  $(\wp_\rho)$  avec les nouveaux paramètres.}
- 11: **fin tantque**
- 12: **retourne**  $\rho^{\text{opt}}$ ;


 FIGURE 3.10 – Diagramme de l'architecture de ATOP<sup>TO</sup>.

voir l'équation (3.22)) et un SIM *géométrique* (une fonction exponentielle) donnée par :

$$g_{dl}(\rho) = \mathbf{p}_{\min} \left( \frac{\mathbf{p}_{\max}}{\mathbf{p}_{\min}} \right)^\rho = \mathbf{p}_{\min} \exp(\rho \ln(\frac{\mathbf{p}_{\max}}{\mathbf{p}_{\min}})), \quad \text{avec } \rho \in [0, 1]. \quad (3.33)$$

Cette formulation (3.33) a été proposée par Dyck et Lowther [160]. Ce schéma d'interpolation est efficace sur les problèmes d'électromagnétisme où le matériau utilisé a des propriétés caractéristiques limites ( $\mathbf{p}_{\min}$  et  $\mathbf{p}_{\max}$ ) qui sont strictement positives [150, 160, 161], ce qui limite son application à l'interpolation de la perméabilité/réductivité magnétique dans notre étude. Bien que cette formulation exponentielle n'ait pas de facteurs de pénalisation explicite, elle est comparable aux SIMs classiques de facteurs de pénalisation compris entre  $\{5, 6, 7\}$  ; voir une représentation graphique sur la Figure 3.11. C'est ce qui explique en partie sa force de pénalisation des densités composites.

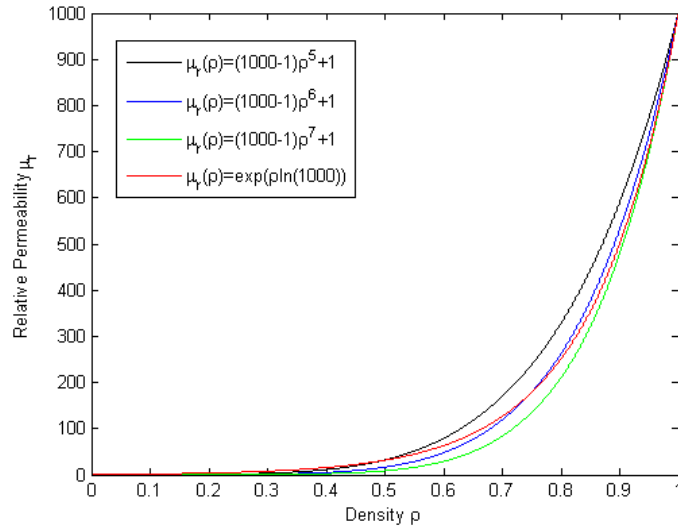


FIGURE 3.11 – Comparaison entre le schéma géométrique et les schémas classiques de degré  $\{5, 6, 7\}$ , la perméabilité magnétique relative de valeurs  $\mathbf{p}_{\max} = \mu_{fer} = 1000$  pour le fer et  $\mathbf{p}_{\min} = \mu_{air} = 1$  pour l'air.

**Remarque 3.1** Sur la Figure 3.11, la comparaison effectuée consiste à observer parmi les SIMs polynomiaux classiques (3.22), lesquels sont suffisamment proches du SIM exponentiel (3.33). Par exemple les SIMs de degré  $n \in \{2, 3, 9, 10\}$  seront plus écartés de la formulation (3.33) comparativement à ceux de degré  $n \in \{5, 6, 7\}$ , voir aussi la Figure 3.6.

### 3.6.1 Conception d'un Circuit de Gauss

Dans cet exemple le circuit comporte 4 bobines et aucun aimant (c'est-à-dire  $\mathbf{M} = 0$ ). Ces bobines sont traversées par des densités de courant données comme

suit : – bobine 1,  $\mathbf{J}_1 = 5 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup>; – bobine 2,  $\mathbf{J}_2 = -5 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup>; – bobine 3  $\mathbf{J}_3 = -5 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup>; – et bobine 4,  $\mathbf{J}_4 = 5 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup>. La zone à topologie variable  $\Omega_v$  est formée de deux sous-régions disjointes  $\Omega_{v1}$  et  $\Omega_{v2}$  qui sont allouées pour la répartition optimale de la perméabilité/réductivité. Quant à la perméabilité magnétique du fer, elle est donnée par ses valeurs limites  $\mu_{\min} = 1$  et  $\mu_{\max} = 1000$  (ou avec la réductivité  $\nu_{\min} = 1/1000$  et  $\nu_{\max} = 1$ ). Il faudra ensuite multiplier ces quantités par  $\mu_0$  (ou par  $\nu_0 = 1/\mu_0$ ) pour avoir les propriétés absolues. Le volume limite  $V_0$  est fixé à 50% du volume total du domaine variable de conception  $\Omega_v$ . Chacune des deux zones  $\Omega_{v1}$  et  $\Omega_{v2}$  est discrétisée uniformément avec 400 ( $= 20 \times 20$ ) cellules rectangulaires (ce qui donne un problème à 800 variables), voir la Figure 3.12(a). Les formulations discrètes correspondantes à l'intégration des SIMs sont exprimées de manière suivante :

— SIM polynomial classique,

$$\nu(\rho) = \sum_{i=1}^{i=N} [1/1000 + (1 - 1/1000)\rho_i^n] \mathbb{1}_i, \quad (3.34)$$

— SIM exponentiel,

$$\mu(\rho) = \sum_{i=1}^{i=N} \exp(\rho_i \ln(1000)) \mathbb{1}_i, \quad (3.35)$$

avec :  $\mathbb{1}_i$  la fonction caractéristique de la  $i^{\text{ième}}$  maille du domaine (discret) de conception  $\Omega_v$ , voir la Figure 3.12(a).

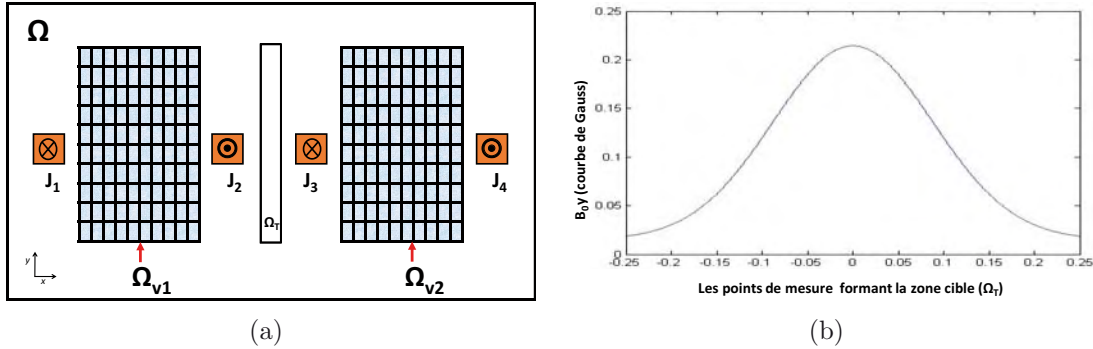


FIGURE 3.12 – Domaine de conception pour le problème du circuit de Gauss : (a) la subdivision du domaine  $\Omega$ , la discrétisation des zones variables  $\Omega_{v1}$  et  $\Omega_{v2}$  ( $\Omega_{v1} \cup \Omega_{v2} = \Omega_v$ ), et la zone de mesure  $\Omega_T$  qui est au centre du domaine  $\Omega$ . (b) Le graphe de la cartographie magnétique : sa composante  $\mathbf{B}_0y$  est une fonction gaussienne.

Ce problème de grande taille a été résolu avec succès en utilisant ATOP<sup>T0</sup> [76]. Sur cette application, les deux SIMs paramétrant le domaine de conception variable  $\Omega_v$  ont trouvé des topologies optimales très proches et équivalentes (au sens de leur connectivité) en partant du même design initial, voir les Figures 3.13. Cependant, soulignons que la formulation exponentielle (3.35) présente de meilleures

performances. En effet, la valeur minimale de la fonction objectif correspondante est  $1,2 \cdot 10^{-2}$  qui est inférieure à celle obtenue avec la formulation (3.34) soit  $2,3 \cdot 10^{-2}$ . De plus, en ce qui concerne le temps de résolution, avec (3.35), on a un Temps-CPU nettement plus faible que celui pris en utilisant la formulation polynomiale, voir la Figure 3.13. Par la suite, sur la Figure 3.14, l'historique de la convergence de la fonction coût, l'approximation du champ imposé  $\mathbf{B}_0$  et le flux magnétique généré par le circuit optimal obtenu avec le schéma (3.35) sont représentés.

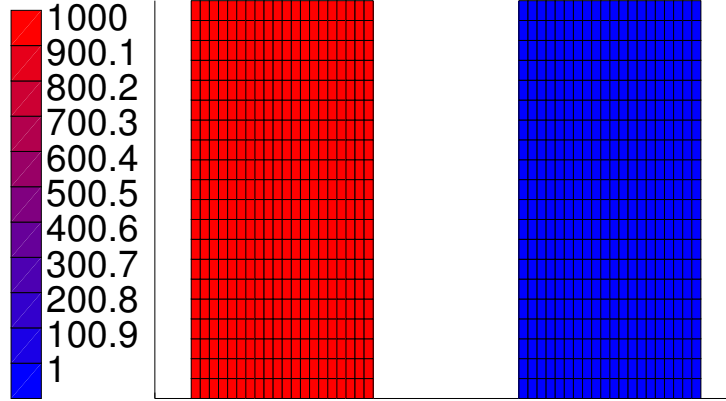
### 3.6.2 Difficultés dues à la Méthode SIMP

Comme toute autre méthode d'optimisation topologique structurale, l'optimisation topologique par distribution de densité de matière SIMP est assujetti : (i) à la dépendance de la solution optimale vis-à-vis du maillage utilisé, (ii) au problème du damier, (iii) à la présence de plusieurs minima locaux (en général, cela dépend aussi de la nature du problème). Pour pallier ces difficultés des techniques de régularisation existent dans la littérature, voir par exemple [51, 154, 159, 163, 162]. Une des technique les plus utilisées pour de telles régularisations est celle des *filtres pour les densités* proposée par Bruns et Tortorelli [164, 165]. En plus des difficultés ci-dessus, l'optimisation par la méthode des densités génère l'apparition de densités intermédiaires dans la solution optimale (lorsque que l'on utilise des algorithmes d'optimisation continue). Bien qu'il soit possible dans certains cas de concevoir ces solutions composites avec des micro-structures perforées ou poreuses, voir la Figure 3.7. Cela est difficilement concevable dans le cas du circuit magnétique. En effet, ces structures contenant des inclusions microscopiques ne sont pas adaptées à toutes les applications physiques. En pratique, pour éviter ces densités intermédiaires, on utilise couramment dans le module optimisation des valeurs relativement élevées du facteur de pénalisation  $n$  : c'est le principe même de l'approche SIMP. Sauf que lorsque  $n > 1$ , on peut rencontrer des instabilités numériques au voisinage de 0 car dans ce cas la pente des fonctions  $g_n$  tend vers 0 (car la dérivée  $\partial g_n / \partial \rho$  intervient dans la sensibilité (3.30)). C'est ainsi que l'on introduit un paramètre  $\rho_{\min} (> 0)$  et le problème discret de design ( $\varphi_\rho$ ) est finalement considéré sur  $[\rho_{\min}, 1]$  (au lieu de  $[0, 1]$ ). Par ailleurs, une grande valeur du facteur de pénalisation  $n$  provoque des problèmes de convergence dans l'algorithme d'optimisation. En effet, pour des valeurs de  $\rho$  strictement plus petites que 1, leur puissance en  $n$  tend vers 0 (c'est-à-dire : pour  $\rho \in ]0, 1[$ ,  $\rho^n \rightarrow 0$ ), ce qui fait qu'au cours des itérations (notamment de type direction de descente) les écarts seront si insignifiants que l'algorithme s'arrêtera de manière prématurée.

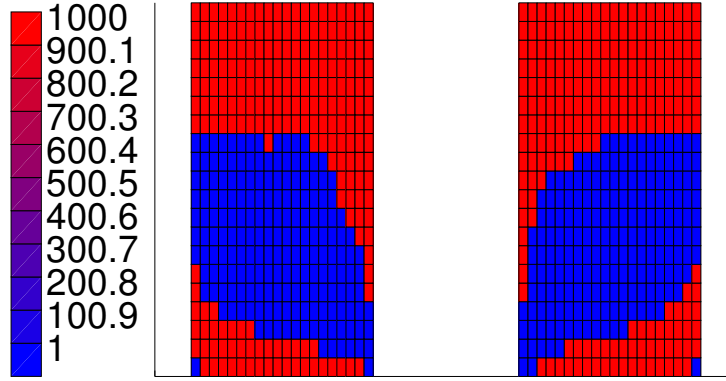
Pour surmonter, ces difficultés, des SIMs alternatives ont été proposés, voir par exemple dans [150, 166, 167], et le schéma le plus couramment utilisé est le schéma de type fonction rationnelle proposée par Stolpe et Svanberg qui est défini par [167] :

$$g_{r,n}(\rho) = \mathbf{p}_{\min} + \frac{\rho(\mathbf{p}_{\max} - \mathbf{p}_{\min})}{1 + n(1 - \rho)}, \quad \text{avec } \rho \in [0, 1], \quad \text{et } n \geq 0. \quad (3.36)$$

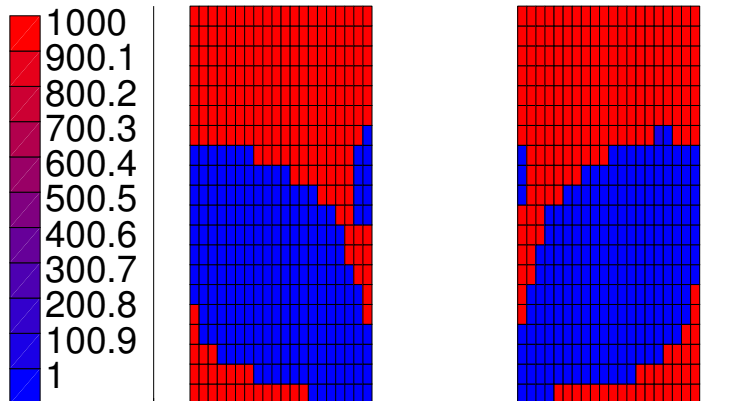




(a) Topologie Initiale



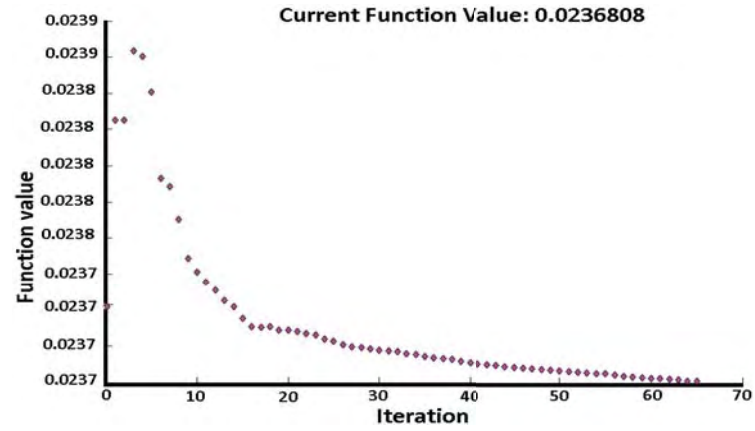
(b) Topologie Optimale avec le schéma exponentiel  $g_{dl}$  (Nombre d'itérations = 344, Temps-cpu = 9h42min21s,  $f_{val} = 1.2 \cdot 10^{-2}$ ).



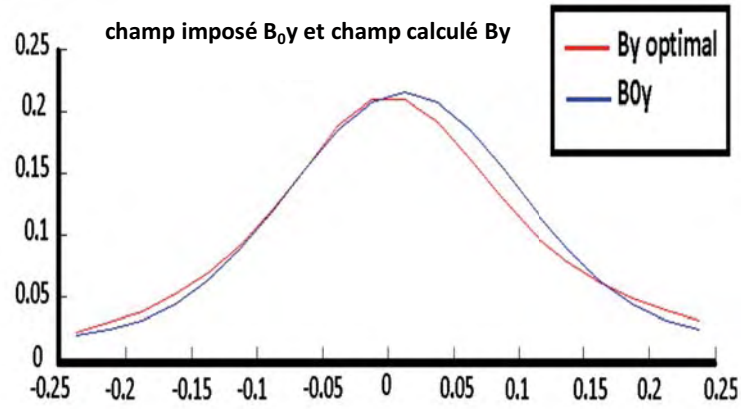
(c) Topologie Optimale avec le schéma Polynomial  $g_n$  (Nombre d'itérations = 684, Temps-cpu = 22h10min12s,  $f_{val} = 2.3 \cdot 10^{-2}$ ).

FIGURE 3.13 – Résultats numériques pour le problème d'un circuit de Gauss. La quantité  $f_{val}$  représente la valeur optimale du critère. Le facteur de pénalisation  $n$  a été pris de 1 à 4. (cela correspond à  $\mathbb{P}_n = [1, 2, 3, 4]$ ).

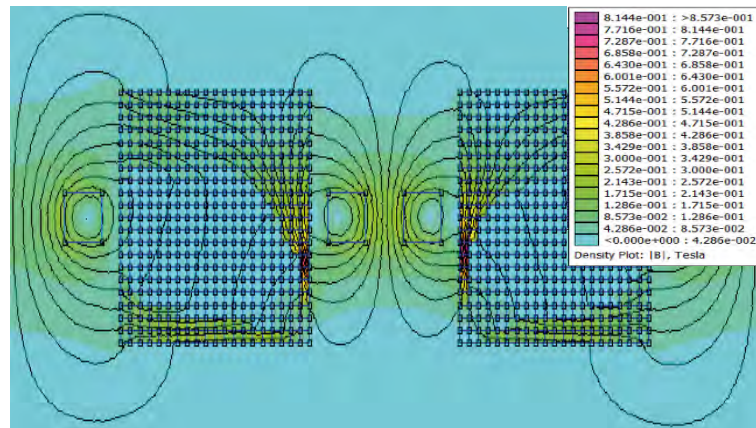




(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.14 – Résultats numériques avec la formulation exponentielle : (a) historique de la convergence de la fonction objectif ; (b) comparaison entre les composantes  $y$  du champ imposé  $\mathbf{B}_0$  et du champ calculé  $\mathbf{B}$  ; (c) distribution spatiale de l'intensité du module  $\|\mathbf{B}\|$  du champ magnétique dans le domaine  $\Omega$ .

Dans ce schéma rationnel (3.36), la quantité  $n$  joue le rôle de facteur de pénalisation comme dans le cas classique (3.22). Le schéma  $g_{r,n}$  a effectivement une pente non nulle même pour  $n$  grand. Mais il reste très similaire au cas classique dans les simulations numériques. Dans nos études, nous proposons, une nouvelle manière de considérer la formulation proposée initialement par Bendsøe [134] qui fera l'objet de la section suivante.

### 3.7 Formulation Polynomiale Généralisée des SIMs

Afin d'utiliser efficacement le schéma classique (3.22), nous proposons dans cette thèse une extension plus générale. En effet, pour une valeur du degré  $n$ , au lieu de se focaliser sur le monôme de degré  $n$ , nous considérons le polynôme « complet »  $f_n$  défini comme suit :

$$\mathbf{p}(\rho) = f_n(\rho) = \sum_{i=0}^n a_i \rho^i, \text{ with } \rho \in [0, 1], \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (3.37)$$

vérifiant les conditions :

1.  $f_n(0) = \mathbf{p}_{\min}$ , et  $f_n(1) = \mathbf{p}_{\max}$ ,
2.  $f_n$  est stable, strictement croissante et convexe sur  $[0, 1]$ .

Ces deux conditions permettent d'avoir une correspondance bijective entre la densité  $\rho$  et les propriétés des matériaux  $\mathbf{p}$ . Le choix des coefficients  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$  dépend du problème de conception étudié. Lorsque ces coefficients sont positifs alors l'expression (3.37) est une combinaison convexe de la famille des schémas classiques  $(f_i^c)_{1 \leq i \leq n}$  avec : pour  $i \in \mathbb{N}^*$  :

$$f_i^c(\rho) = \mathbf{p}_{\min} + (\mathbf{p}_{\max} - \mathbf{p}_{\min})\rho^i, \quad \rho \in [0, 1]. \quad (3.38)$$

Ainsi, on obtient des schéma polynomiaux généralisés (3.37), qui vont présenter plus d'avantages que les considérations classiques. En effet, ces formules générales possèdent deux moyens de contrôle pour un meilleur usage de l'approche SIMP : à savoir le degré  $n$  pour réduire l'apparition des densités intermédiaires et les poids  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$  pour induire de la stabilité numérique lors du processus d'optimisation, voir une illustration sur la Figure 3.15.

Cette approche peut avoir une interprétation physique qui est la suivante : en considérant le facteur de pénalisation  $n$  comme l'intensité d'une force appliquée à la densité  $\rho^i$  dans la  $i^{\text{ème}}$  cellule du maillage de  $\Omega_v$  (maillage pour les variables d'optimisation, voir les Figures 3.8, 3.9 et 3.12(a)), alors la formulation généralisée permet d'amortir l'effet de cette force en répartissant sa charge entre plusieurs points (à travers les monômes  $(\rho^i)_{1 \leq i \leq n}$ ) au lieu de l'appliquer en un seul point (c'est-à-dire le monôme  $\rho^n$  pour le SIM classique (3.22) ou (3.38)). Ainsi, avec la formulation proposée (3.37), le processus d'optimisation se déroule sans difficulté pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . De plus, à travers les résultats obtenus au cours des différentes simulations effectuées, nous avons constaté que la formulation classique favorisait plus les solutions proches de 0 que celles qui avoisinent 1. Cela peut s'expliquer

par le fait que l'on utilise des algorithmes de type gradient qui cherchent en général les solutions parmi les points critiques (c'est-à-dire les points qui annulent la dérivée du critère). Cet aspect constitue un intérêt quant à l'utilisation de la forme générale proposée en (3.37). En effet, on note que la forme générale contient toujours une partie linéaire d'où la quantité  $\partial f_n / \partial \rho$  ne sera pas rigoureusement égale à 0 aux composantes nulles de  $\rho$  pour  $n > 1$  (comme elle l'est avec la forme classique (3.22)). Cela implique que la sensibilité du problème (3.30) sera nulle uniquement en des points vraiment stationnaires (bien évidemment, ceci va améliorer la qualité des solutions locales trouvées). De plus les fonctions  $f_n$  ( $n \geq 1$ ) se comportent de manière symétrique entre les deux valeurs extrêmes de  $\rho$ , ce qui favorise une sorte d'équi-probabilité entre les deux valeurs discrètes  $\{0; 1\}$ . Des illustrations se trouvent sur la Figure 3.15. Dans ce qui suit, nous allons proposer des techniques pour déterminer les poids  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ .

### 3.7.1 Proposition de SIMs Généralisés

Pour établir des relations analytiques qui permettent de calculer les coefficients  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$  du polynôme  $f_n$ , on utilise la condition 1 donnée dans la définition (3.37) qui nous donne les relations ci-dessous :

$$a_0 = \mathbf{p}_{\min}, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \mathbf{p}_{\max} - \mathbf{p}_{\min}. \quad (3.39)$$

Les égalités de l'équation (3.39) sont des relations explicites entre la fonctionnelle  $f_n$  et les propriétés des matériaux utilisés pour la conception optimale. Ainsi, il devient évident qu'il existe plusieurs choix possibles<sup>16</sup> pour les coefficients  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ . Dans notre étude, nous proposons de considérer ces coefficients comme des suites récurrentes d'un certain *ordre*  $p$ . Dans ce cas, il est alors possible de les exprimer en fonction du degré  $n$  de pénalisation. Comme  $a_0$  est connu ( $= \mathbf{p}_{\min}$ , voir l'équation (3.39)), il reste alors à déterminer la famille  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Pour cela, on pose :

$$\alpha_0 + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{i+1} a_{m+i} = a_{m+p}, \quad \text{with : } m + p \leq n, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}. \quad (3.40)$$

Dans la définition (3.40) des poids il y a  $p$  degrés de liberté. Ainsi, la suite  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  sera déterminée de manière unique à partir des  $p$  premiers coefficients.

---

16. En tenant compte bien sûr de la condition 2 qui accompagne la formulation générale (3.37).

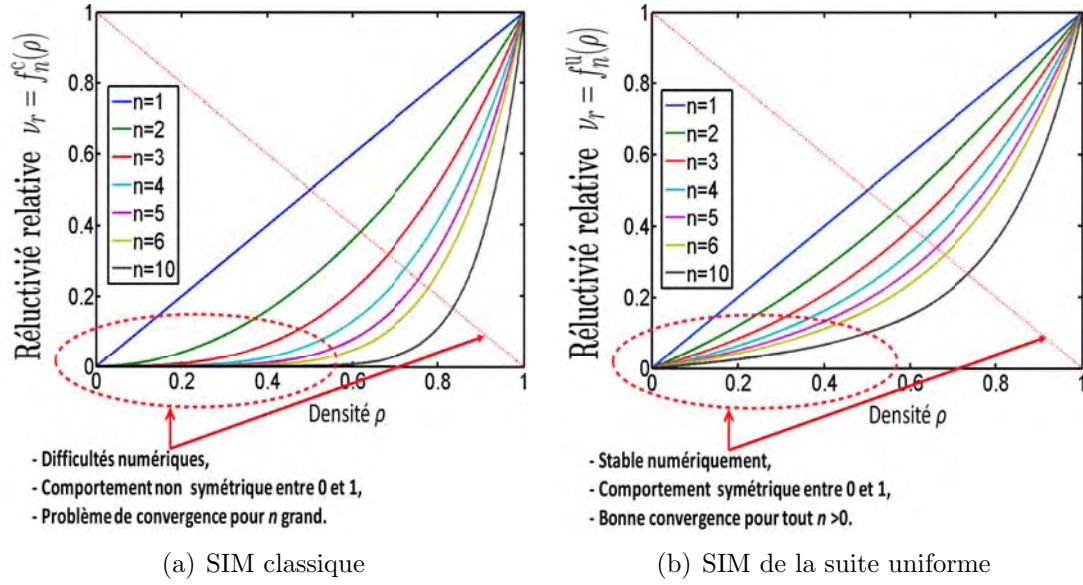


FIGURE 3.15 – Les représentations graphiques des SIMs classiques  $f_n^c$  et généralisés  $f_n^u$  (SIM uniforme (3.43)) qui sont utilisés avec la méthode SIMP. Ces courbes sont tracées avec la reductivité  $\nu_r$  qui a pour valeurs min et max :  $\nu_{r\min} = 10^{-3}$  et  $\nu_{r\max} = 1$ . Le vecteur  $\mathbb{P}_n$  égal à  $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 10]$ .

## 3.8 Etudes Comparatives avec les Formulations Généralisées

### 3.8.1 Suites Affines du Premier Ordre

Par souci de simplicité, nous utilisons ici des suites récurrentes affines du premier ordre connues dans les manuels classiques sous le nom de suites arithmético-géométriques. Dans ce cas, on exprime chaque poids  $a_i$  en fonction de son indice (ou rang)  $i$ , des coefficients  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  et du poids  $a_1$  (qui est au premier ordre). Par la suite, à partir des relations (3.39) et (3.40), nous avons pour la suite affine :

$$a_i = \begin{cases} a_1 + (i - 1)\alpha_0, & \text{si } \alpha_1 = 1, \\ \alpha_1^{i-1} \left( a_1 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \right) + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.41)$$

De plus, en combinant (3.39) et (3.41), le poids  $a_1$  est calculé par :

$$a_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 2 \left( \frac{\mathbf{p}_{\max} - \mathbf{p}_{\min}}{n} \right) - (n - 1)\alpha_0 \right], & \text{si } \alpha_1 = 1 \\ \left( \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1^n - 1} \right) \left[ \mathbf{p}_{\max} - \mathbf{p}_{\min} - \frac{n\alpha_0}{1-\alpha_1} \right] + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.42)$$

Pour les exemples numériques, nous avons choisi les formulations suivantes :

- *Suite Uniforme que l'on nommera **uniform*** : Dans ce cas, on prend :  $\alpha_0 = 0$ , et  $\alpha_1 = 1$ . Ainsi pour  $i = 2, \dots, n$ ,  $a_i = a_1$ , le schéma correspondant est :

$$f_n^u(\rho) = a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \rho^i, \quad \forall \rho \in [0, 1]. \quad (3.43)$$

- *Suite géométrique<sup>17</sup> que l'on nommera **geometric*** : dans ce cas, on prend :  $\alpha_0 = 0$ , et  $\alpha_1 = 10$ . Le schéma obtenu est :

$$f_n^g(\rho) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_1 \alpha_1^{i-1} \rho^i, \quad \forall \rho \in [0, 1]. \quad (3.44)$$

- *Suite arithmético-géométrique que l'on nommera **arithmetic-geometric*** : Dans ce cas, on prend :  $\alpha_0 = 1.5$  et  $\alpha_1 = 0.01$ . Le schéma résultant est :

$$f_n^{ag}(\rho) = a_0 + \sum_{i=1}^n \left[ \alpha_1^{i-1} \left( a_1 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \right) + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \right] \rho^i, \quad \forall \rho \in [0, 1]. \quad (3.45)$$

### Remarques 3.2 Sur les SIMs choisis

- On nommera le SIM classique par **classical** de degré  $n$  par  $f_n^c$ .
- Dans les formules générales (3.41) et (3.42), il sera recommandé de prendre  $\alpha_1 \neq -1$ . En effet, choisir  $\alpha_1$  égal à  $-1$  dans ces expressions peut induire des oscillations conduisant à des instabilités numériques car  $(-1)^n \in \{-1; +1\}$ .
- On gardera l'appellation anglaise en « **gras** » pour ces différents schémas polynomiaux (en particulier dans la légende des figures).

### 3.8.2 Analyse des Profils de Performances

Dans ce paragraphe, un **Benchmark** a été effectué avec les 4 formulations sélectionnées : Classique (3.38), Uniforme (3.43), Géométrique (3.44) et Arithmético-Géométrique (3.45). La technique d'évaluation des performances introduite par Dolan et More dans [168] a été adoptée et les cas tests considérés ont été traités avec le solveur ATOP<sup>T0</sup>. Pour cette étude comparative, le problème de conception d'un circuit magnétique, typiquement celui du premier exemple d'application de [76] a été résolu. Les quantités caractéristiques sont brièvement rappelées comme suit : l'aimant permanent  $\mathbf{M} = 0$ , la densité de courant  $\mathbf{J} = 2 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup>, les valeurs de perméabilité relatives sont  $\mu_{\min} = 1$  (pour l'air) et  $\mu_{\max} = 1000$  (pour le fer). Dans ces problèmes, les valeurs du facteur de pénalisation ont été prises de 1 à 6 (une limitation à 6 a été choisie pour que le SIM classique puisse être plus stable).

Les résultats numériques obtenus ont été comparés selon deux critères :

- *le nombre total de densités intermédiaires dans la topologie optimale (noté  $\tau$ )* : la bonne performance sera pour la fonction SIM qui résout le plus grand pourcentage des problèmes tests avec *le plus petit nombre de densités intermédiaires*.

---

17. A ne pas confondre avec le schéma  $gal$  donné dans l'expression (3.33) proposée par Dyck et Lowther [160]. On gardera plutôt l'appellation schéma exponentielle pour cette fonctionnelle  $gal$ .

- la valeur minimale de la fonction de coût (noté  $f_{opt}$ ) : la meilleure performance est attribuée à la fonction SIM ayant le plus grand nombre de problèmes résolus avec la plus petite valeur possible de la fonction de coût.

En considérant ces deux critères, nous recherchons un bon compromis entre une bonne qualité de la convergence et le nombre minimum de densités composites dans le design optimal. En effet, en général, la solution continue est meilleure que la solution discrète en terme de valeur du minimum trouvé (du critère) et donc en terme d'approximation du champ imposé dans  $\Omega_T$ . De plus, une forte pénalisation dégrade la qualité de la solution à cause du manque de bonne convergence comme souligné ci-dessus (surtout avec le SIM classique).

Le profil de la performance d'un SIM est défini comme le pourcentage de problèmes tests résolus, noté  $p$ . Ainsi la performance peut-être définie par une probabilité, voir pour plus de détails [168]. Par exemple, pour une valeur donnée de  $\tau_0$ ,  $p(\tau_0)$  est la probabilité qu'un schéma considéré résout ce ratio de problèmes avec au plus  $\tau_0$  nombre de densités intermédiaires (dans la solution optimale). Puis, pour les critères du Benchmark la meilleure formulation est celle qui a sa courbe au-dessus des autres, voir la Figure 3.16.

Sur la figure. 3.16(a), nous constatons que le schéma uniforme  $f_n^u$  est celui qui a résolu plus de 50% des cas tests avec au plus  $\tau = 12$  densités intermédiaires dans la solution optimale. Cependant, avec le schéma classique  $f_n^c$  pour  $\tau = 12$ , le ratio de problèmes résolus est environ de 25%. La formulation arithmético-géométrique  $f_n^{ag}$  est ainsi plus efficace que la formulation classique si l'on considère uniquement le nombre de densités intermédiaires  $\tau$ . Par contre les SIMs géométrique et classique sont très proches pour ce cas d'analyse.

Sur la Figure 3.16(b), nous remarquons que la formulation uniforme  $f_n^u$  a résolu plus de 65% des problèmes pour une valeur minimale de critère inférieure ou égale à  $f_{opt} = 5.10^{-5}$ . Pour la même précision sur la valeur optimale du critère les trois autres formulations sont assez proches (mais la courbe de la formulation géométrique est au-dessus des deux autres ce qui montre bien qu'elle est plus performante).

Avec ces tests numériques, nous avons constaté que la formulation uniforme  $f_n^u$ , nous offre le bon compromis recherché qui consiste à obtenir une meilleure qualité de convergence de la fonction objectif avec un design optimal contenant peu de densités composites. Cela est difficile en toute généralité (surtout avec le schéma classique qui est couramment implémenté dans les codes d'optimisation topologique). Par exemple c'est le cas avec le schéma géométrique  $f_n^g$  : en effet ce schéma est moins efficace que  $f_n^c$  et  $f_n^{ag}$  en considérant leur performance en  $\tau$ . En revanche il est plus performant que ces derniers en terme de valeur minimale du critère  $f_{opt}$ , comme illustré sur la Figure 3.16. Cette dernière comparaison montre l'intérêt d'un bon choix pour les poids  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ .



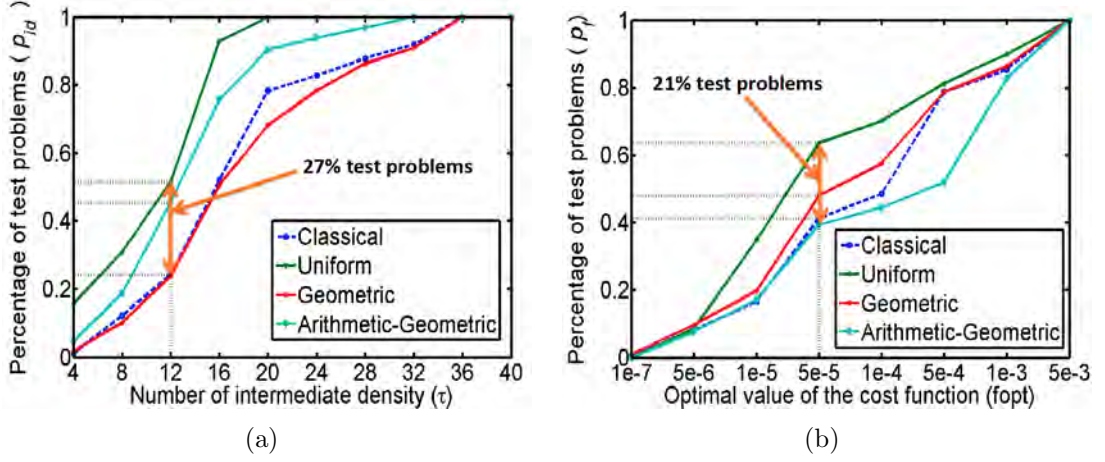


FIGURE 3.16 – Analyse des profils de performances, avec le code  $\text{ATOP}^{\text{TO}}$  utilisant les quatre SIMs sélectionnés : (a) Performance sur l'apparition des densités intermédiaires dans la solution optimale. Les segments en pointillés montrent les ratios de problèmes tests résolus pour  $\tau = 12$ . (b) Performance pour la qualité de l'approximation du champ imposé dans  $\Omega_T$ . Les segments en pointillés montrent les ratios de problèmes tests résolus pour  $f_{opt} = 5 \cdot 10^{-5}$ .

### 3.8.3 Conception d'une Pièce Polaire pour PEH

Dans cet exemple de problème d'électromagnétisme, le but est de concevoir un circuit magnétique optimal capable de générer dans la zone de mesure  $\Omega_T$  un profil de cartographie de champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  de composante  $\mathbf{B}_0 y$  nulle et dont la composante  $\mathbf{B}_0 x$  est fixée et représentée sur la Figure 3.17(b). Le domaine de conception étudié est donné sur la Figure 3.17(a).

Dans ce problème, le paramètre de conception est la perméabilité, les valeurs de courant et d'aimant restent identiques à celles données dans la section 3.8.2. Le volume  $V_0$  est fixé à 40% du volume de  $\Omega_v$ .  $\Omega_v$  est discrétisé en  $20 \times 16$  mailles (soit  $N = 320$  variable de conception). On utilise un point de départ  $\rho^0 = (0.1, \dots, 0.1)$ , c'est-à-dire que la densité 0.1 est uniformément répartie dans chaque cellule de  $\Omega_v$  discrétisé. Le degré de pénalisation est fixé à  $n = 5$  pour chaque SIM utilisé. Dans le tableau 3.8.3, la quantité  $f_{val}$  désigne la valeur de la fonction objectif après l'élimination de toutes les densités composites dans le design topologique optimal trouvé (c'est-à-dire la valeur du coût pour la solution binaire résultante).

En plus du benchmarking effectué dans la sous-section 3.8.2, nous avons obtenu sur l'application numérique pour le design de la pièce polaire des résultats confirmant ceux de cette section. De surcroît, le schéma uniforme présente des résultats meilleurs par rapport à ceux obtenus avec les autres schémas, voir  $f_5^u$  dans le Tableau 3.8.3. Sur cet exemple numérique, on montre que lorsqu'il y a peu de densités intermédiaires dans la solution continue, après la phase de post-process la solution binaire reste très proche de la solution continue. Dans le cas contraire, le design continu et le design discret sont très différents. Voir les Figures 3.19 et 3.18.

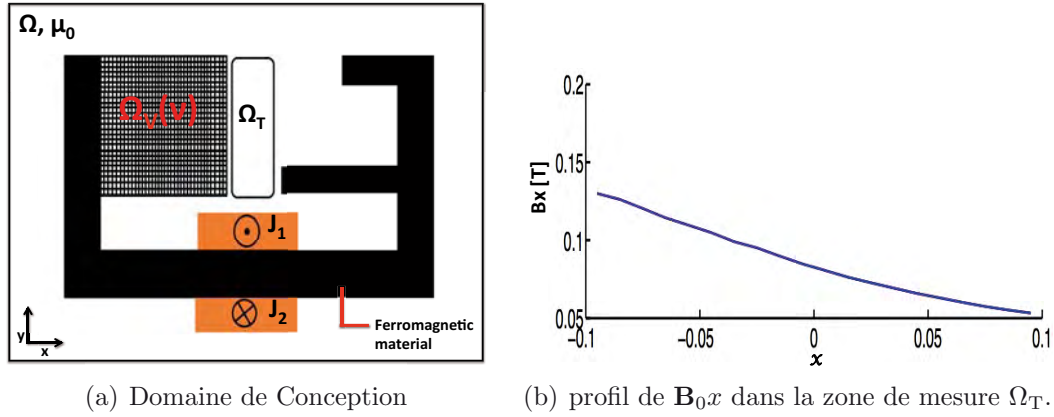


FIGURE 3.17 – Problème de conception d’une pièce polaire pour PEH.

SIM	$f_{opt}$	$\tau$	$f_{val}$	Temps-CPU (min)
$f_5^c$	4.01e-4	236	3.63e-3	45
$f_5^u$	4.97e-4	48	4.60e-4	150
$f_5^g$	8.84e-4	227	5.42e-3	54
$f_5^{ag}$	4.79e-4	118	4.28e-4	126

TABLE 3.2 – Les résultats numériques du problème de conception de la pièce avec ATOP<sup>TO</sup> suivant les quatre SIMs proposés.

**Remarques 3.3** (Réalisation concrète des designs optimaux obtenus)

Les solutions optimales des Figures 3.13(b) et 3.13(c) présentent des topologies équivalentes aux blocs de matériaux ferromagnétiques séparés. De même les solutions données sur les Figures 3.18(b) et 3.19(b) possèdent aussi des cellules ferromagnétiques détachées. Ces solutions topologiques optimales sont difficiles à réaliser directement (en général). En effet, il faudrait trouver un moyen pour relier ces paries de matériaux ferromagnétiques déconnectées ou les enlevé lorsque les cellules correspondant ne sont pas majoritaires (groupées, voir par exemple les Figures 3.18(b) et 3.19(b)). Il faut aussi noter que ces exemples d’application sont plus théoriques, typiquement pour des illustrations d’ordre académique. Cependant, dans le chapitres 5 des détails sont donnés sur les possibilités d’élaborations des designs optimaux en terme de leur réalisation concrète pour les configuration des pièces polaires d’un PEH.



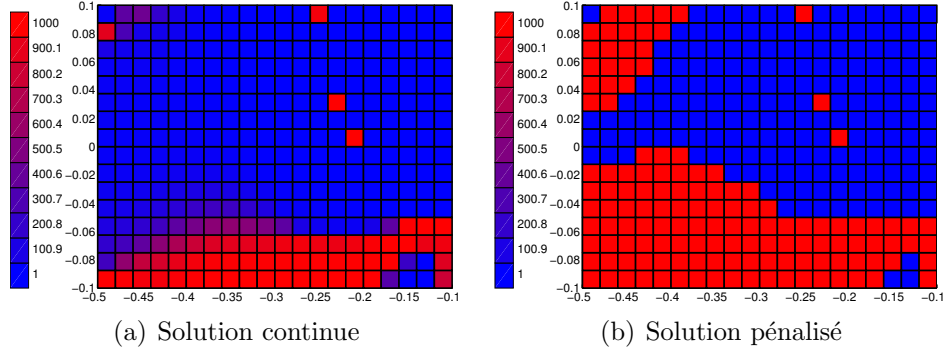


FIGURE 3.18 – Résultats numériques avec avec le SIM Classique.

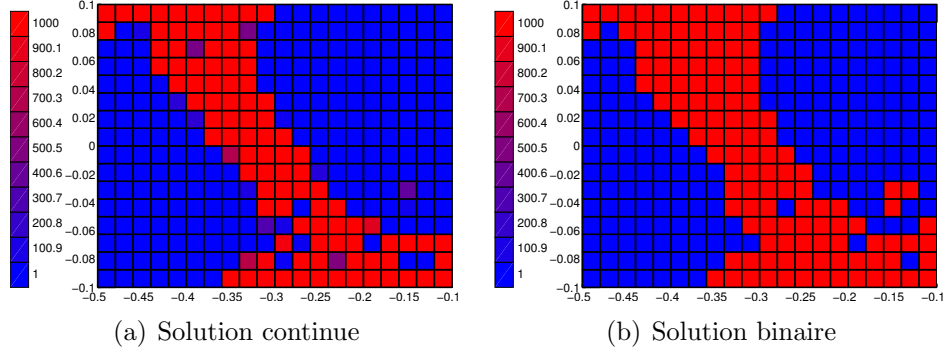


FIGURE 3.19 – Résultats numériques avec le SIM Uniforme.

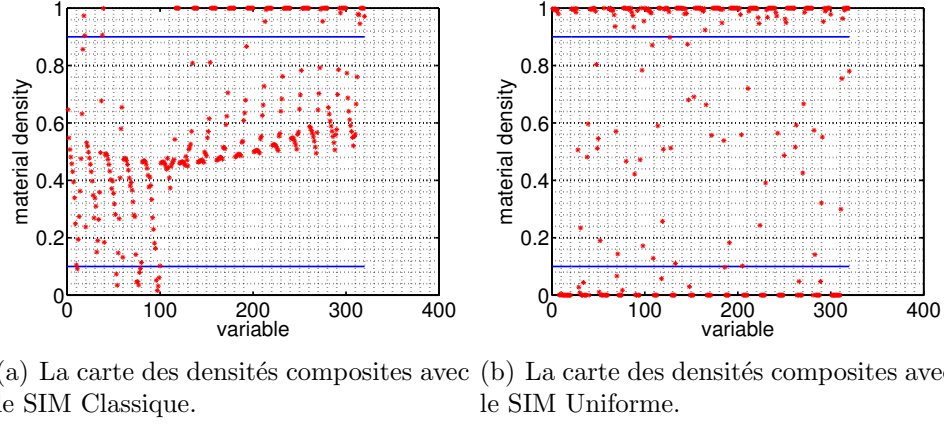


FIGURE 3.20 – Comparaison de la distribution des densités composites dans la solution continue.

### 3.9 Conclusion

Au cours de ces études, nous avons exploré les différentes méthodes d'optimisation topologique à savoir la méthode du gradient topologique, la méthode des lignes de niveaux, la méthode d'homogénéisation et enfin la méthode SIMP. Notre choix s'est focalisé sur cette dernière méthode pour la résolution numérique de problème

de conception d'un circuit magnétique pour PEH. Nous avons expliqué en détails la nomenclature et le principe de fonctionnement du solveur d'optimisation topologique spécifiquement développé **ATOP**<sup>T0</sup>. Ce programme se caractérise entre autre par une bonne convergence au cours du processus d'optimisation (en comparant l'utilisation de SIMs classiques à celle de SIM généralisés) et nous avons pu obtenir des topologies de circuit magnétiques tout à fait réalisables (c'est-à-dire des proche de celle binaire).

Cependant nous avons pu constater que les designs résultants du processus d'optimisation dépendaient fortement du point de départ. En effet, afin d'atténuer cette dépendance, il peut être intéressant d'appliquer des techniques d'optimisation globales. Mais, au vu de la taille de ces problèmes de conception optimale il est évident qu'avec les méthodes globales habituelles la résolution sera difficile (surtout à cause du Temps-CPU). Donc, il faudra développer des heuristiques afin de pouvoir déterminer des solutions globales pour ces problèmes (lorsqu'elles existent).

## Chapitre 4

### Algorithme de B&B pour l'Optimisation Topologique de PEHs

## 4.1 Introduction

Dans les procédures de conception optimale des structures mécaniques comme électromagnétiques, en générale l'intérêt se porte sur la solution exacte du problème. Dans le cas de la conception optimale des circuits magnétiques pour PEHs, des maillages fins sont nécessaires. Cela implique naturellement la résolution de problèmes d'optimisation de grande taille ce qui devient problématique lorsque l'on envisage le développement de méthodes notamment déterministes d'optimisation globale. En effet, les approches globales habituelles restent difficiles voire impossibles à appliquer sur des problèmes de grande taille de part la complexité exponentielle du problème d'optimisation dans le cas général. De plus, dans notre cas, la recherche de solutions globales est encore plus compliquée car nous avons à résoudre des problèmes inverses d'électromagnétisme qui sont mal-posés comme nous l'avons souligné dans les chapitres précédents. Néanmoins, nous présenterons dans ce chapitre un programme d'optimisation globale basé sur un algorithme par séparations et évaluations progressives de type *Branch and Bound* (B&B) intégrant des techniques de calculs des bornes en utilisant l'arithmétique des intervalles.

## 4.2 Méthodes Globales pour l'Optimisation Topologique

Les problèmes d'optimisation de conception structurale sont ceux où le nombre de paramètres de contrôle peut croître très rapidement. En effet, pour une meilleure précision sur la forme des structures étudiées des paramètres supplémentaires sont nécessaires dans le cas de l'optimisation de dimensionnement ou de forme, et des domaines finement discrétisés sont indispensables dans le cas de l'optimisation topologique. Ainsi, l'utilisation de méthodes d'optimisation globale devient trop coûteuse en temps de calcul. Cependant, en considérant des problèmes de taille modérée, des solutions exactes peuvent être obtenues lorsque l'on utilise des techniques d'optimisation globale. Dans la littérature, il existe des travaux en optimisation topologique utilisant des algorithmes d'optimisation globale qui sont principalement basés sur des approches stochastiques tels que les algorithmes évolutionnistes comme par exemple les algorithmes génétiques. Les travaux de Y. M. Xie et ses co-auteurs [171, 172] sont à ce titre intéressants pour l'utilisation d'algorithmes évolutionnistes<sup>1</sup> en optimisation topologique.

Quant aux méthodes déterministes de types B&B, on trouve quelques premiers articles récents, dont ceux de M. Stolpe *et al* [173, 174, 175], focalisés sur le design des structures en treillis (donc du « sizing optimization »).

L'approche déterministe d'optimisation globale B&B privilégiée dans cette thèse reste très attractive car elle est très efficace pour la résolution des problèmes d'optimisation d'une réalité physiques plus complexes comme celui du PEH. Dans ce contexte et pour assurer la continuité et le développement du code IBBA (pour Inter-

---

1. Aussi appelé couramment dans la littérature française : algorithme évolutionnaire (par la traduction anglais evolutionary algorithm).

val Branch and Bound Algorithm) initié par F. Messine (voir par exemple [49, 169]), nous avons opté pour une approche B&B utilisant l'Arithmétique des Intervalles.

Dans le paragraphe suivant, nous allons brièvement donner quelques aspects théoriques fondamentaux sur les opérations algébriques de l'analyse par intervalles avant de les appliquer aux calculs des bornes sur les champs magnétiques et de les implémenter dans l'optimisation topologique des PEHs avec le code IBBA.

## 4.3 Algorithmme B&B par Intervalles

### 4.3.1 Arithmétique d'Intervalles

Les théories fondamentales de l'arithmétique par intervalles modernes furent connues grâce aux travaux de Ramon E. Moore (1966) [177, 178] qui a développé cet outil pour analyser et rendre robuste le codage numérique des nombres réels représentés sur ordinateur par des nombres à virgules flottantes. Cet outil permet d'éliminer les erreurs de calculs numériques [179] mais cela nécessite un temps de calcul plus long et peut générer des encadrements de l'erreur peu précis. Le principe consiste à encadrer un nombre issu d'un calcul numérique  $x_m$  par deux nombres flottants les plus proches possible  $x_g$  et  $x_d$  (tel que :  $x_g \leq x_d$ ) ainsi  $x_m \in [x_g, x_d]$ .

L'utilisation des techniques d'arithmétique d'intervalles en optimisation globale a été rendu populaire grâce aux travaux de Ichida et Fujii [180], Hansen [181, 182], Ratschek, Rokne et Voller [184, 185, 186], Kearfott [187, 188].

Les opérations algébriques sur les intervalles s'inspirent de celles des réels. Soit  $\mathcal{I} = \{[\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] : \underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}\}$ , l'ensemble des intervalles réels fermés et bornés. Soient  $\mathbf{I}, \mathbf{J} \in \mathcal{I}$ , et  $\otimes \in \{+, -, \cdot, /\}$ , alors on a :

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{J} = \{a \otimes b | a \in \mathbf{I}; b \in \mathbf{J}\}. \quad (4.1)$$

L'image d'une opération algébrique quelconque sur les intervalles contient toutes les valeurs possibles obtenues à travers le croisement de tous les couples appartenant aux intervalles correspondants. Ainsi, de la continuité des intervalles réels, de celle des opérateurs arithmétiques et du fait que  $\mathbb{R}$  soit totalement ordonné, alors le résultat obtenu est aussi un intervalle réel plus précisément un élément de  $\mathcal{I}$ . Pour l'opération de division («  $\otimes = /$  »), à l'image de la division dans  $\mathbb{R}$ , zéro ne doit pas appartenir au dénominateur. Pour  $\mathbf{I}, \mathbf{J} \in \mathcal{I}$ , Moore définit l'arithmétique

d'intervalles dans [178] de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I} + \mathbf{J} = [\underline{\mathbf{I}} + \underline{\mathbf{J}}, \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{J}}], \\ -\mathbf{J} = [-\bar{\mathbf{J}}, -\underline{\mathbf{J}}], \\ \mathbf{I} - \mathbf{J} = \mathbf{I} + (-\mathbf{J}), \\ \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = [\min\{\underline{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{J}}, \underline{\mathbf{I}} \cdot \bar{\mathbf{J}}, \bar{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{J}}, \bar{\mathbf{I}} \cdot \bar{\mathbf{J}}\}, \max\{\underline{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{J}}, \underline{\mathbf{I}} \cdot \bar{\mathbf{J}}, \bar{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{J}}, \bar{\mathbf{I}} \cdot \bar{\mathbf{J}}\}], \\ 1/\mathbf{J} = [1/\bar{\mathbf{J}}, 1/\underline{\mathbf{J}}], \text{ si } 0 \notin [\underline{\mathbf{J}}, \bar{\mathbf{J}}], \\ \mathbf{I}/\mathbf{J} = \mathbf{I} \cdot (1/\mathbf{J}). \end{array} \right. \quad (4.2)$$

En particulier, on a la définition suivante pour le carré de l'intervalle  $\mathbf{I}$  :

$$\mathbf{I}^2 = \left\{ \begin{array}{ll} [\bar{\mathbf{I}}^2, \underline{\mathbf{I}}^2], & \text{si } \bar{\mathbf{I}} < 0, \\ [\underline{\mathbf{I}}^2, \bar{\mathbf{I}}^2], & \text{si } \underline{\mathbf{I}} \geq 0, \\ [0, \max(\underline{\mathbf{I}}^2, \bar{\mathbf{I}}^2)], & \text{si } \underline{\mathbf{I}} < 0 < \bar{\mathbf{I}}. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Les définitions ci-dessus<sup>2</sup> (4.2) montrent que dans la théorie des intervalles, la soustraction et la division ne sont pas les opérations inverses de l'addition et de la multiplication. Comme nous pouvons le remarquer l'arithmétique d'intervalles ne conserve pas toutes les propriétés de l'arithmétique standard. En effet, la structure  $(\mathfrak{I}, +, \cdot)$  est uniquement *sous-distributive*, c'est à dire pour  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K} \in \mathfrak{I}$ , on a :

$$\mathbf{I} \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{K}) \subset \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{K} \quad (4.4)$$

L'inclusion dans la relation (4.4) peut-être stricte, par exemple pour  $\mathbf{I} = [-2, -1]$ ,  $\mathbf{J} = [-1, 1]$ ,  $\mathbf{K} = [1, 2]$ , on a :

$$\mathbf{I} \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{K}) = [-6, 0] \subsetneq \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{K} = [-6, 1].$$

De manière générale, les structures algébriques  $(\mathfrak{I}, +, 0)$  et  $(\mathfrak{I}, \cdot, 1)$  sont des *monoïdes commutatifs* [189] ; où pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , en arithmétique d'intervalles,  $x$  devient  $[x, x]$  (par abus de notation on gardera  $x$  au sens des intervalles, ce type d'intervalle est connu sous le nom d'*intervalle dégénéré* par Moore [179]). En revanche les opérateurs ensemblistes  $(\cup, \subset, \cap, \setminus, \dots)$  restent identiques au standard sur les parties de  $\mathbb{R}$ . Ces opérations ensemblistes et de calculs algébriques se généralisent sur les hypercubes, nommés aussi pavés de  $\mathbb{R}^n$  (avec  $n \geq 1$ ). On notera

2. Dans les définitions données dans les égalités (4.2), la division par un intervalle contenant 0 n'est pas définie. Cependant, pour éliminer cette restriction, E. Hansen propose une arithmétique d'intervalles étendue gérant les bornes infinies, pour plus de détails voir [49, 169, 178, 179].

par  $\mathfrak{I}^n$  l'ensemble des intervalles fermés et bornés de  $\mathbb{R}^n$  (de même une extension de la théorie des intervalles sur les matrices existe dans la littérature [190, 191]).

En particulier, les calculs par intervalles s'effectuent aussi à travers l'extension naturelle des fonctions (forme générale des fonctions d'inclusion) sur les fonctions analytiques standards telles que : `cosinus`, `sinus`, `logarithme`, ....

**Exemples :**

- $\sin([0, \pi/2]) = [\sin(0), \sin(\pi/2)] = [0, 1]$ .
- $\exp([0, 1]) = [\exp(0), \exp(1)] = [1, e]$ .
- $\arccos([-1, 1]) = [\arccos(1), \arccos(-1)] = [0, \pi]$ .

### 4.3.2 Fonction d'Inclusion

L'une des phases importante et centrale d'un algorithme de type B&B est le calcul des bornes, que l'on effectue ici en utilisant l'arithmétique d'intervalles. Dans les calculs de ces bornes, on est amené à évaluer des expressions fonctionnelles, pouvant avoir des comportements structurels divers (polynomiales, exponentielles, logarithmiques, trigonométriques,...). Pour mener à bien ces calculs, on se base sur la définition suivante :

**Définition 4.1** Soient,  $\mathbf{I} \in \mathfrak{I}^n$ ,  $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue. La **fonction d'inclusion** aux intervalles de  $f$  est l'application notée  $\mathcal{F} : \mathfrak{I}^n \Rightarrow \mathfrak{I}$ , tel que :

$$f(\mathbf{I}) := \left[ \min_{x \in \mathbf{I}} f(x), \max_{x \in \mathbf{I}} f(x) \right] \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{I}) := \left[ \underline{\mathcal{F}(\mathbf{I})}, \overline{\mathcal{F}(\mathbf{I})} \right]. \quad (4.5)$$

La fonction d'inclusion  $\mathcal{F}$  de  $f$  vérifie les **propriétés** suivantes :

1. La fonction d'inclusion  $\mathcal{F}(\mathbf{I})$  **coïncide** avec la fonction  $f(\mathbf{I})$  si  $\mathbf{I}$  est un intervalle dégénéré, c'est à dire :

$$f(x) = \mathcal{F}(x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{R}^n). \quad (4.6)$$

2. La fonction d'inclusion est **croissante** sur l'ensemble des parties de l'ensemble de base par rapport à l'ordre ensembliste « inclusion :  $\subset$  », c'est-à-dire :

$$\forall \mathbf{I}, \mathbf{J} \in \mathfrak{I}^n, \quad \mathbf{I} \subset \mathbf{J} \implies \mathcal{F}(\mathbf{I}) \subset \mathcal{F}(\mathbf{J}). \quad (4.7)$$

3. Cas des **fonctions monotones** sur  $\mathbb{R}$  : soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , si  $f$  est strictement monotone alors  $\mathcal{F}(\mathbf{I}) = f(\mathbf{I})$  pour tout intervalle  $\mathbf{I}$ . Plus précisément, on a

$$f(\mathbf{I}) = \begin{cases} [f(\bar{\mathbf{I}}), f(\underline{\mathbf{I}})] , & \text{si } f \text{ est décroissante,} \\ [f(\underline{\mathbf{I}}), f(\bar{\mathbf{I}})] , & \text{si } f \text{ est croissante.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Cette propriété sera utile pour notre étude de conception des circuits magnétiques dans les démonstrations car on aura une monotonie (plus précisément

une croissance) induite par l'augmentation du module du champ magnétique dans le canal plasma (entrefer magnétique) du dispositif en fonction de l'augmentation du volume de matériaux ferromagnétiques dans le domaine de conception (en considérant le domaine à traiter de la Figure 4.3).

**Remarque 4.1 (Difficultés de l'analyse des intervalles)** En général dans le cadre de la détermination des bornes pour faire l'optimisation globale utilisant l'arithmétique des intervalles, on est intéressé par des intervalles les plus petits possibles, (si possible avoir une égalité dans la définition (4.1)). C'est là que réside la principale difficulté dans le maniement des intervalles avec la **non unicité de l'extension naturelle**. En effet, pour une même expression fonctionnelle donnée, le résultat des calculs algébriques dépendent de l'ordre dans lequel le développement a été effectué. Cela conduit surtout à la surestimation des minorants et majorants obtenus trop distants des bornes réelles. L'une des principales causes est notamment la non distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (et aussi par rapport à la soustraction, voir l'équation (4.4)).

- **Exemple :** Pour la fonction quadratique  $q(x) = ax^2 + bx + c$ , le meilleur encadrement est obtenu avec l'expression suivante :

$$q(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]. \quad (4.9)$$

- En effet : pour  $a = b = c = 1$ , avec les deux expressions  $q_d$  (forme développée) et  $q_c$  (forme canonique (4.9)) :

$$\begin{aligned} q_d(x) &= x^2 + x + 1, & q_c(x) &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \\ q_d([-1, 1]) &= [-1, 1]^2 + [-1, 1] + [1, 1], & q_c([-1, 1]) &= \left([-1, 1] + \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)^2 + \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ q_d([-1, 1]) &= [-1, 3]. & q_c([0, 1]) &= [0, 3]. \end{aligned}$$

Il est clair que le plus petit intervalle est celui obtenu avec la forme canonique (4.9) ci-dessus. Ainsi, on voit à quel point le maniement des intervalles est complexe. Ces propriétés seront utilisées pour les démonstrations que l'on effectuera dans ce manuscrit et plus précisément pour le calcul des bornes inférieures par intervalles car la fonction objectif de notre problème d'optimisation topologique est quadratique en  $\mathbf{B}$  (champ magnétique généré par le circuit à concevoir). Cependant dans la littérature, on trouvera d'autres propriétés fort intéressantes [176, 177, 178, 189, 190, 191].

## 4.4 Formulation du Problème d'Optimisation Topologique

On souhaite maintenant appliquer la théorie de l'Arithmétique des Intervalles pour calculer des bornes inférieures utiles dans la résolution de notre problème de conception par optimisation topologique avec un algorithme B&B. Rappelons rapidement la formulation de base du problème d'optimisation à traiter.



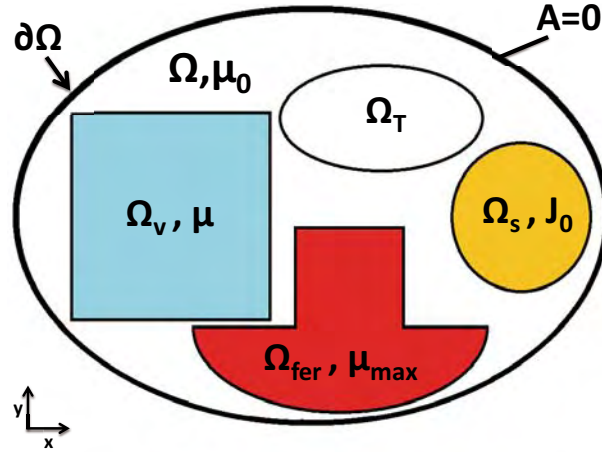


FIGURE 4.1 – Domaine de conception représentatif du problème d'optimisation topologique : la zone admissible est  $\Omega_v$  où la topologie spatiale optimale en terme de matériau est à déterminer.

Soit  $\Omega$  une partie de  $\mathbb{R}^2$  désignant le domaine de conception topologique du circuit magnétique à concevoir. On considère le problème inverse de conception qui consiste à synthétiser la cartographie magnétique  $\mathbf{B}_0$  souhaitée dans la zone  $\Omega_T$  de  $\Omega$ . Contrairement aux cas génériques exposés dans les chapitres 2 et 3, dans ce problème inverse, on déterminera principalement la topologie du noyau ferromagnétique du dispositif dans la zone à topologie variable  $\Omega_v$ , les valeurs des sources magnétiques l'aimant permanent  $\mathbf{M}$  et la densité de courant dans les bobines  $\mathbf{J}$  seront fixées. Plus précisément, on pose  $\mathbf{M} = 0$  et  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$  (dont on donnera la valeur dans la section application numérique). Cette densité de courant  $\mathbf{J}_0$  est donnée dans la région  $\Omega_s$ . La Figure 4.1 illustre le domaine de conception à étudier. Comme précédemment, la frontière du domaine  $\partial\Omega$  est assujettie à une condition au limite de type Dirichlet homogène sur le vecteur potentiel magnétique  $A$ . Par conséquent, le paramètre de conception  $\mathbf{p}$  se réduit à la perméabilité magnétique  $\mu$  (ou de manière équivalente à la réductivité magnétique  $\nu$ , en utilisant la relation :  $\mu = 1/\nu$ ). Ainsi, le problème d'optimisation topologique pour la conception de circuit magnétique considéré peut être formulé comme suit :

$$(\Pi) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) = \int_{\Omega_T} \|\mathbf{B}(A) - \mathbf{B}_0\|^2 d\Omega, \\ \text{s.c. :} \\ -\nabla \times [\nu(\mathbf{p})\mathbf{B}(A)] + \mathbf{J}_0 = 0, \text{ avec } A = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{p} \in \mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in L^\infty(\Omega) : \mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max}, \int_{\Omega_v} \mathbf{p} d\Omega = V_0\}. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

$$(4.11)$$

$$(4.12)$$

## 4.5 Algorithme B&B pour l'Optimisation Topologique

Pour la résolution numérique du problème  $(\Pi)$ , dans le chapitre 3 une approche de distribution optimale de densité de matériaux a été proposée en utilisant une approche SIMP basé sur des algorithmes d'optimisation locale. On procédera dans le chapitre de manière analogue en discrétisant le domaine de conception étudié, afin d'avoir une formulation du problème d'optimisation  $(\Pi)$  en un problème "0-1" non linéaire et non convexe (similaire à la formulation  $(\wp_\rho)$ ). Ensuite, une adaptation du code IBBA [49, 169, 50] sera élaborée pour obtenir des solutions exactes.

### 4.5.1 Formulation Discrète du Problème $(\Pi)$

Avec l'algorithme déterministe B&B, la pénalisation utilisée dans l'algorithme SIMP n'est plus nécessaire. Par conséquent, on utilisera un SIM linéaire, qui donne pour  $n = 1$  :

$$\mathbf{p} = g(\rho) = \mathbf{p}_{\min} + (\mathbf{p}_{\max} - \mathbf{p}_{\min})\rho, \quad \forall \rho \in [0, 1]. \quad (4.13)$$

Par la suite, tout sera exprimé en fonction de la seule variable  $\rho$ . On posera  $\mathcal{B}(\rho) = \mathbf{B}(A(\rho))$ . Comme on implémente une forme discrétisée du problème  $(\Pi)$ , en particulier la quantité  $\int_{\Omega_T} \|\mathbf{B}(A) - \mathbf{B}_0\|^2 d\Omega$ , il est alors possible d'exprimer le critère simplement sous la forme  $\|\mathcal{B}(\rho) - \mathbf{B}_0\|^2$ . Le problème combinatoire équivalent au problème  $(\Pi)$  peut être donné par :

$$(\Pi_\rho) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\rho} F(\rho) = \|\mathcal{B}(\rho) - \mathbf{B}_0\|^2, \\ \text{s.t. :} \\ h_A(\rho) = 0, \text{ in } \Omega, \\ \sum_{i=1}^N \rho_i = v_0, \\ \rho \in [0, 1]^N. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

$$h_A(\rho) = 0, \text{ in } \Omega, \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=1}^N \rho_i = v_0, \quad (4.16)$$

$$\rho \in [0, 1]^N. \quad (4.17)$$

avec :

- $N$  le nombre de variables du problème discret dans la zone  $\Omega_v$  ;
- $v_0$  le volume élémentaire de chaque cellule du maillage uniforme de  $\Omega_v$  ;
- $h_A(\rho)$  la fonction obtenue en remplaçant dans l'équation de Maxwell-Ampère la variable  $\mathbf{p}$  par le schéma d'interpolation correspondant  $g(\rho)$ .

Dans le problème  $(\Pi_\rho)$ , une formulation continue a été utilisé (c'est-à-dire on a considéré le pavé  $[0, 1]^N$  au lieu de l'ensemble purement binaire  $\{0, 1\}^N$ ) mais au cours du processus d'optimisation algorithmique, les solutions sont cherchées parmi les sommets du pavé  $[0, 1]^N$ , voir l'algorithme 2.

### 4.5.2 Hypothèse et propriétés de la formulation $(\Pi_\rho)$ pour le B&B

Il faut maintenant résoudre le problème "0-1" non linéaire  $(\Pi_\rho)$  avec une technique d'optimisation globale basée sur du B&B. Au vu de la complexité naturelle

de cette méthode qui est de l'ordre de  $O(2^N)$ , il est très difficile de traiter des problèmes de très grande taille en toute généralité. En particulier, concernant notre problème de conception optimale des circuits magnétiques pour PEH, la difficulté de résolution peut considérablement augmenter à cause de la non-linéarité du problème d'une part, et d'autre part, de l'utilisation d'un code d'éléments finis à chaque itération pour résoudre la contrainte EDP (ce qui peut-être aussi coûteux en temps-CPU selon la taille du domaine  $\Omega$  du problème). Il devient alors difficile voire impossible d'extraire des bornes directement en utilisant l'arithmétique d'intervalles. C'est pourquoi nous avons introduit une hypothèse sur le module  $\|\mathbf{B}\|$  qui règne dans l'entrefer d'un circuit magnétique de type PEH : cette hypothèse est vérifiée dans la région de mesure  $\Omega_T$ .

**Hypothèse 4.1** Soit  $\mathbf{X}$  un pavé de  $[0, 1]^N$ . Pour tout  $\rho \in \mathbf{X}$ , on a :

$$\|\mathcal{B}(\rho)\| \in [\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\|, \|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{sup})\|] \text{ dans } \Omega_T, \quad (4.18)$$

où les notations d'arithmétiques par intervalles vectorielles standards sont utilisées pour  $\text{.inf}$  et  $\text{.sup}$  ;  $\mathbf{X}.\text{inf}$  (resp.  $\mathbf{X}.\text{sup}$ ) représente les sommets de l'hypercube  $\mathbf{X}$  et ses composantes sont constituées par la borne inférieure  $\underline{\mathbf{X}}_i$  (resp. la borne supérieure  $\overline{\mathbf{X}}_i$ ) ; où  $\underline{\mathbf{X}}_i$  sont les composantes intervalles du pavé  $\mathbf{X}$ . On utilise les notations  $\text{.inf}$  et  $\text{.sup}$  dans cette partie pour faciliter la mise en place du programme d'optimisation numérique car ce sont ces notions qui sont utilisées directement dans la bibliothèque INTLAB [192].

L'arithmétique d'intervalles est prise en charge dans un environnement de programmation MATLAB, à travers la plateforme de calcul et d'optimisation par intervalles INTLAB. On peut ainsi y manipuler les intervalles à souhait sans difficulté majeure avec les fonctionnalités disponibles sous MATLAB. Cette routine a été développée par Rump et ses collaborateurs [192].

**Remarques 4.2** Sur l'hypothèse 4.1

- Sur notre problème de conception optimale dont le domaine d'étude est montré sur la Figure 4.3, la force de notre hypothèse est qu'elle implique une croissance du module de l'induction magnétique dans la zone  $\Omega_T$  en fonction de la quantité de matériaux distribuée dans la zone variable  $\Omega_v$ . En terme de densité de matériaux  $\rho$ , cela correspond à un vecteur  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)$  ayant plus de composantes en « 1 »<sup>3</sup>.
- Cette hypothèse physique a été vérifiée empiriquement et numériquement sur notre problème test. Elle n'est pas vérifiée en toute généralité sur les circuits magnétiques des dispositifs électromagnétiques. Par exemple, lorsque la zone cible  $\Omega_T$  est plus petite ou change de position par rapport aux zones à topologie variable  $\Omega_v$ , la totalité du flux magnétique ne passe plus dans  $\Omega_T$ . Dans ce cas l'apport de matériau ferromagnétique n'augmente plus nécessairement le module de l'induction magnétique dans  $\Omega_T$ . Cependant la non vérification ne met pas en cause les résultats ce chapitre. En effet, lorsqu'elle n'est

---

3. Comme par exemple : pour  $\rho_0 = (0, \dots, 0)$ ,  $\rho_1 = (1, \dots, 1)$  et  $\rho_2 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  on a l'ordre suivant du module du champ magnétique,  $\|\mathcal{B}(\rho_0)\| \leq \|\mathcal{B}(\rho_2)\| \leq \|\mathcal{B}(\rho_1)\|$  dans  $\Omega_T$ .

*pas satisfait, c'est le temps-cpu qui pourra augmenter avec l'algorithme de B&B.*

- *Si tout le flux passe, l'hypothèse 4.1 est directement vérifiée. Cependant dans nos problèmes tests tout le flux ne passe pas nécessairement entre les deux pôles.*

Dans ce qui suit, sous l'hypothèse 4.1, on obtient les résultats suivants sur le calcul des bornes pour le problème  $(\Pi_\rho)$ .

**Proposition 4.1** *Soit  $\mathbf{X}$ , un pavé de  $[0, 1]^N$ , le critère  $F$  de  $(\Pi_\rho)$  est minoré par :*

$$F(\rho) \geq \text{LB}_1(\mathbf{X}) = \|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\|^2 - 2\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{sup})\| \|\mathbf{B}_0\| + \|\mathbf{B}_0\|^2, \forall \rho \in \mathbf{X}. \quad (4.19)$$

**Preuve:** avec (4.14), nous obtenons, pour tout  $\rho$  pris dans  $\mathbf{X}$ ,

$$F(\rho) = \|\mathcal{B}(\rho)\|^2 - 2\mathcal{B}(\rho)\mathbf{B}_0 + \|\mathbf{B}_0\|^2. \quad (4.20)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors :

$$-\mathcal{B}(\rho)\mathbf{B}_0 \geq -\|\mathcal{B}(\rho)\| \|\mathbf{B}_0\|. \quad (4.21)$$

En utilisant les équations (4.21) et (4.18) dans la relation (4.20), nous déduisons (4.19) directement. ■

**Proposition 4.2** *Soit  $\mathbf{X}$ , un pavé de  $[0, 1]^N$ , une borne inférieure de la fonction  $F$  est :*

$$F(\rho) \geq \text{LB}_2(\mathbf{X}) = \min(\text{LB}_{21}(\mathbf{X}), \text{LB}_{22}(\mathbf{X})), \forall \rho \in \mathbf{X}, \quad (4.22)$$

avec :

$$\begin{cases} \text{LB}_{21}(\mathbf{X}) = (\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\| - \|\mathbf{B}_0\|)^2, \\ \text{LB}_{22}(\mathbf{X}) = (\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{sup})\| - \|\mathbf{B}_0\|)^2. \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\quad (4.24)$$

**Preuve:** En combinant l'expression (4.20) et l'inégalité (4.21), on trouve :

$$F(\rho) \geq \tilde{F}(\rho) = \|\mathcal{B}(\rho)\|^2 - 2\|\mathcal{B}(\rho)\| \|\mathbf{B}_0\| + \|\mathbf{B}_0\|^2, \forall \rho \in \mathbf{X}. \quad (4.25)$$

Par la suite, on a la formulation suivante :

$$\tilde{F}(\rho) = (\|\mathcal{B}(\rho)\| - \|\mathbf{B}_0\|)^2, \forall \rho \in \mathbf{X}. \quad (4.26)$$

Grâce à l'hypothèse (4.18) et l'inclusion naturelle de l'arithmétique des intervalles (voir dans la définition), on a :

$$\tilde{F}(\rho) \in ([\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\|, \|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{sup})\|] - \|\mathbf{B}_0\|)^2. \quad (4.27)$$

D'après les propriétés algébriques élémentaires de l'arithmétique des intervalles (4.3) (en plus dans ces deux cas, nous avons  $\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\| \geq 0$ , voir aussi la définition (4.8) avec la relation (4.18)), on trouve :

$$\tilde{F}(\rho) \in [\min(\text{LB}_{21}(\mathbf{X}), \text{LB}_{22}(\mathbf{X})), \max(\text{LB}_{21}(\mathbf{X}), \text{LB}_{22}(\mathbf{X}))]. \quad (4.28)$$

D'où nous en déduisons directement la Proposition 4.2. ■

**Proposition 4.3 (Comparaison entre les  $LB_1$  et  $LB_2$ )** *Les bornes inférieures de la fonction objectif données dans les Propositions 4.1 et 4.2 vérifient :*

$$LB_2(\mathbf{X}) \geq LB_1(\mathbf{X}), \forall \mathbf{X} \subset [0, 1]^N. \quad (4.29)$$

**Preuve:** Soit  $\mathbf{X}$ , un pavé de  $[0, 1]^N$ , en utilisant (4.18), on a :

$$\begin{cases} \|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\|^2 \leq \|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{sup})\|^2, \\ -2\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{sup})\|\|\mathbf{B}_0\| \leq -2\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\|\|\mathbf{B}_0\|, \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\quad (4.31)$$

d'où :

$$\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\|^2 - 2\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{sup})\|\|\mathbf{B}_0\| + \|\mathbf{B}_0\|^2 \leq (\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\| - \|\mathbf{B}_0\|)^2, \quad (4.32)$$

$$\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\|^2 - 2\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{sup})\|\|\mathbf{B}_0\| + \|\mathbf{B}_0\|^2 \leq (\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{sup})\| - \|\mathbf{B}_0\|)^2. \quad (4.33)$$

Il s'ensuit alors :

$$LB_1(\mathbf{X}) \leq LB_{21}(\mathbf{X}) \text{ and } LB_1(\mathbf{X}) \leq LB_{22}(\mathbf{X}). \quad (4.34)$$

■

**Proposition 4.4 (Admissibilité de la boîte  $\mathbf{X}$ )** *Si une boîte  $\mathbf{X}$  contient une solution optimale globale du problème de conception  $(\Pi_\rho)$  alors :*

$$\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{inf})\| \leq \|\mathbf{B}_0\| + \sqrt{\tilde{f}}, \quad (4.35)$$

$$\|\mathcal{B}(\mathbf{X}.\text{sup})\| \geq \|\mathbf{B}_0\| - \sqrt{\tilde{f}}, \quad (4.36)$$

où  $\tilde{f}$  est une borne supérieure de la fonction objectif du problème  $(\Pi_\rho)$  (cette valeur peut-être atteinte sur un point admissible obtenu au cours des itérations de l'algorithme B&B).

**Preuve:** Considérons la fonction objectif  $F(\rho) = \|\mathcal{B}(\rho) - \mathbf{B}_0\|^2$  du problème discret  $(\Pi_\rho)$ . Soit  $\tilde{f}$  sa borne supérieure courante (typiquement selon le principe de l'algorithme par B&B [49, 50], il existe un point courant  $\tilde{\rho}$  obtenu au cours des itérations tel que  $F(\tilde{\rho}) = \tilde{f}$ ) et  $\rho^*$  une solution globale de  $(\Pi_\rho)$ , par définition de l'optimum global on a :  $F(\rho^*) \leq \tilde{f}$ . Ce qui implique que nous sommes intéressés seulement par les points  $\rho \in \mathbf{X}$  tels que :  $F(\rho) = \|\mathcal{B}(\rho) - \mathbf{B}_0\|^2 \leq \tilde{f}$ . En remarquant que  $\|\mathcal{B}(\rho) - \mathbf{B}_0\|^2 \geq (\|\mathcal{B}(\rho)\| - \|\mathbf{B}_0\|)^2$ , nous obtenons,

$$|\|\mathcal{B}(\rho)\| - \|\mathbf{B}_0\|| \leq \sqrt{\tilde{f}}. \quad (4.37)$$

L'inégalité (4.37) montre que le point  $\rho$  de  $\mathbf{X}$  est réalisable si le module de l'induction magnétique  $\|\mathcal{B}(\rho)\|$  est borné par  $\|\mathbf{B}_0\| - \sqrt{\tilde{f}}$  and  $\|\mathbf{B}_0\| + \sqrt{\tilde{f}}$ .

Ainsi, une boîte  $\mathbf{X}$  ne contient aucune solution si ses extrémités inférieures  $\mathbf{X}.\text{inf}$  (resp. ses extrémités supérieures  $\mathbf{X}.\text{sup}$ ) ne satisfont par l'inégalité (4.35)(resp. inégalité (4.36)). Dans le cas contraire,  $\mathbf{X}$  contient des minima globaux. ■

**Remarque 4.3** *La Proposition 4.4 a permis de générer deux contraintes additionnelles que l'on intégrera dans notre code d'optimisation B&B. En effet, ces contraintes améliorent la convergence de notre code B&B d'optimisation topologique.*

### 4.5.3 Algorithme B&B pour l'Optimisation Topologique

Le code  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  développé dans ses travaux dérive du code d'optimisation IBBA [49]. La particularité de ce nouveau code présenté et nommé aussi Algorithme 2 est l'utilisation des propositions 4.1-4.4 qui renforcent son efficacité et permet de prendre en compte les propriétés électromagnétiques du circuit à concevoir. En **ligne 4**, nous avons le critère d'arrêt qui est satisfait lorsque la différence entre  $\tilde{f}$  (la valeur de la fonction objectif  $F$  en la solution réalisable courante  $\tilde{\rho}$ ) et la valeur de la plus mauvaise borne inférieure  $\min_{(z,\mathbf{x}) \in \mathcal{L}} z$  est plus petite en module  $|\tilde{f} - \min_{(z,\mathbf{x}) \in \mathcal{L}} z|$  qu'un certain epsilon  $\epsilon_f$  (typiquement  $\epsilon_f = 10^{-6}$ ) ; on fixera aussi éventuellement le nombre maximal d'itérations ce qui permet à l'algorithme de s'arrêter même s'il n'arrive pas à prouver que la solution courante qu'il a est bien un minimum global. Cela est utile le plus souvent pour éviter au programme de tourner inutilement en cas de non convergence, ce qui peut être assez fréquent dans les problèmes traités car ce sont des problèmes inverses et la complexité de  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  est exponentielle. La **ligne 11** intègre les bornes inférieures calculées  $\text{LB}_1$  et  $\text{LB}_2$ , la contrainte de volume (4.12) et les inégalité (4.35)-(4.36). Avec  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$ , nous n'avons pas besoin de « post-process » pour faire la pénalisation des densités intermédiaires (comme en avec  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$ , cf le Chapitre 3). Cela constitue l'un des avantages dans l'utilisation du programme d'optimisation  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$ . En effet, nous obtenons directement une vraie solution binaire donc une topologie optimale réalisable. Cette caractéristique est aussi imposée dans l'algorithme à travers les **lignes 6** et **12**. On remarque dans la **ligne 12**, que le point milieu admissible  $m$  doit être binaire et satisfaire la contrainte de volume (4.12). En pratique, des points sont aléatoirement tirés jusqu'à l'obtention d'un point qui soit réalisable au sens de notre problème  $(\Pi_\rho)$ . Pour le reste, notre code reste identique à un algorithme B&B classique [49, 50].

Notre code  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  reste limité sur la taille des problèmes qui peuvent-être résolus. Cependant, il est capable de fournir des solutions globales contrairement à  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  qui est à la fois dépendant du point de départ et du schéma d'interpolation des matériaux utilisés. Par contre  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  a l'avantage de résoudre localement des problèmes de grandes dimensions. L'idée de proposer une approche heuristique combinant les codes d'optimisation topologique  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  et  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  pour une conception optimisée des circuits magnétiques nous a permis de développer un code hybride  $\text{ATOP}^{\text{T0}} + \text{ATOP}^{\text{BBA}}$  dénommé par la suite  $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{T0}}$  donné en Algorithme 3. Afin d'exploiter de manière optimale ce code hybride, il est avantageux de classer les problèmes suivant leur taille en deux types comme suit :

- Les problèmes de type SSP (SSP : Small Size Problems), qui sont les problèmes pour lesquels le nombre de variable de conception reste inférieur ou égal à 20.
- Les problèmes de type LSP (LSP : Large Size Problems) qui sont les problèmes de grande dimension.

Notre procédé d'optimisation hybride est résumé sur en Algorithme 3. Le maillage adaptatif du domaine à optimiser est illustré sur la Figure 4.2. On arrive de cette manière à induire une convergence vers un minimum global à nos codes car l'influence du point de départ n'est plus aussi importante que dans le cas d'une utili-

**Algorithme 2** ATOP<sup>BBA</sup>

- 
- 1:  $X :=$  Pavé initial à explorer pour la recherche de la solution globale,  $\{ \mathbf{X} = [0, 1]^N \}$
  - 2:  $\tilde{f} := +\infty$ , borne supérieure courante de la valeur du minimum global, {Cette borne est initialement prise à  $+\infty$  et mise à jour au fil des itérations.}
  - 3:  $\mathcal{L} := (-\infty, \mathbf{X})$ , l'initialisation de la structure de données pour stocker les éléments, (les éléments de  $\mathcal{L}$  ont deux composantes : une borne inférieure et un pavé espace de recherche de solutions globales)
  - 4: **tantque**  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  et  $\tilde{f} - \min_{(z, \mathbf{X}) \in \mathcal{L}} z > \epsilon_f$  {et le nombre maximal d'itérations n'est pas atteint} **faire**
    - 5: Extraire dans  $\mathcal{L}$  l'élément qui a le plus petit minorant,
    - 6: Séparation du pavé  $\mathbf{X}$  en  $\mathbf{X}_0$  et  $\mathbf{X}_1$  {choisir les  $\nu$  premiers segments de longueur 1 ; et construire deux branches  $(\mathbf{X}_0)_\nu := [0, 0]$  et  $(\mathbf{X}_1)_\nu := [1, 1]$ }
    - 7: **pour**  $j = 1$  à 2 **faire**
      - 8: Calculer :  $l_j = LB(\mathbf{X}_j)$  une borne inférieure de  $F$  sur  $\mathbf{X}_j$ ,
      - 9: Calculer :  $B_{\text{inf}} = \|\mathcal{B}(\mathbf{X}_j.\text{inf})\|$  et  $B_{\text{sup}} = \|\mathcal{B}(\mathbf{X}_j.\text{sup})\|$ ,
      - 10: Calculer :  $s = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_j$ ,
      - 11: **si**  $l_j \leq \tilde{f}$  et  $s.\text{inf} \leq v_0$  et  $s.\text{sup} \geq v_0$  et  $B_{\text{inf}} \leq \|\mathbf{B}_0\| + \sqrt{\tilde{f}}$  et  $B_{\text{sup}} \geq \|\mathbf{B}_0\| - \sqrt{\tilde{f}}$ , **alors**
        - 12: Calcul d'un point  $m \in \{0, 1\}^N \cap \mathbf{X}_j$  tel que  $\sum_{i=1}^n m_i = v_0$ ,  $\{m := \mathbf{X}_j.\text{mid}$ , et si une composante  $m_i = \frac{1}{2}$ , on choisit aléatoirement  $m_i$  dans  $\{0; 1\}$ , si nécessaire ce choix dans  $\{0; 1\}$  peut concerner d'autres composantes de  $m$  afin de satisfaire la contrainte de volume  $\sum_{i=1}^n m_i = v_0\}$
        - 13: **si**  $\tilde{f} > F(m)$ , **alors**
          - 14:  $\tilde{\rho} = m$  et  $\tilde{f} = F(m)$ ,
          - 15: Supprimer dans la structure  $\mathcal{L}$  les couples  $(z, \mathbf{X})$  tel que  $z > \tilde{f}$
        - 16: **finsi**
        - 17: Insérer le couple  $(l_j, \mathbf{X}_j)$  dans la structure  $\mathcal{L}$ ,
        - 18: **finsi**
      - 19: **fin pour**
    - 20: **fin tantque**
    - 21: **retourne**  $\tilde{\rho}$  : la solution globale de  $(\Pi_\rho)$ .

---



**Algorithme 3**  $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{T0}}$ 

- 
- 1: (P) := problème de design initial {Le modèle discret du problème de conception de circuits électromagnétiques à résoudre, typiquement  $(\Pi_\rho)$  ou  $(\wp_\rho)$  (dans le chapitre 3).}
  - 2: **si** (P) est un SSP **alors**
  - 3:   Résoudre (P) avec  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$
  - 4: **sinon**
  - 5:   Transformer le problème LSP (P) en un SSP noté (P') à travers un maillage plus grossier {Le choix de ce maillage grossier dépend à la fois de la taille initiale de (P) et de l'utilisateur.}
  - 6:   Résoudre (P') avec  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  ; Soit  $\rho^{\text{P},\text{OG}}$  la solution globale obtenue {Si elle existe (car on a à résoudre des problèmes inverses).}
  - 7:   Dupliquer les composantes de  $\rho^{\text{P},\text{OG}}$  en la taille du design initial de (P). Posons  $\rho^{\text{P},0}$  cette solution étendue.
  - 8:   Résoudre (P) avec  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  utilisant  $\rho^{\text{P},0}$  comme point de départ.
  - 9: **fini**
  - 10: **retourne** la solution optimale  $\rho_{\text{opt}}$  de (P).
- 

sation directe de  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$ . De surcroît, ce choix du design initial est une particularité originale de notre code  $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{T0}}$ . Ce procédé reste assez proche d'une technique homotopique.

## 4.6 Design d'un Circuit Magnétique Élémentaire

On se propose d'appliquer les codes  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  et  $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{T0}}$  à un exemple de design d'un circuit magnétique similaire à un circuit magnétique de type PEH. Le domaine traité est présenté sur la Figure 4.3 et représente une coupe transverse du circuit axisymétrique. Les composantes du champ magnétique associé à la cartographie imposée  $\mathbf{B}_0$  sont données sur la Figure 4.4. Le champ magnétique est généré par une bobine parcourue par une densité de courant  $\mathbf{J}_0 = (\mathbf{J}_{01}, \mathbf{J}_{02})$  et caractérisée par ses deux sections planes (constituant la zone  $\Omega_s$  avec :  $\mathbf{J}_{01} = -2 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup> et  $\mathbf{J}_{02} = +2 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup>). La perméabilité magnétique  $\mu$  qui est le paramètre de conception a pour valeur minimale  $\mu_{\min} = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m et pour valeur maximale  $\mu_{\max} = 1000\mu_0$ .

### 4.6.1 Résultats Numériques avec $\text{ATOP}^{\text{T0}}$ et $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$

La première partie de cette application est dédiée à la résolution avec  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$ , sur des problèmes de classe SSP. Ainsi, on choisit deux cas tests à maillages grossiers et l'on note  $V_T$  le nombre total de mailles dans chaque cas : le premier cas test comporte 6 cellules dont 3 dans chaque zone variable pour un volume fixé  $V_0 = 1/3V_T$  (ce qui donne une cellule en matériau ferromagnétique dans chaque zone variable  $\Omega_{vi}$ ,  $i = 1, 2$ , c'est-à-dire  $v_0 = 2$ ) ; le second cas test comporte 20 variables dont 10 pour chacune des deux zones variables pour un volume fixé  $V_0 = 1/5V_T$  (soit



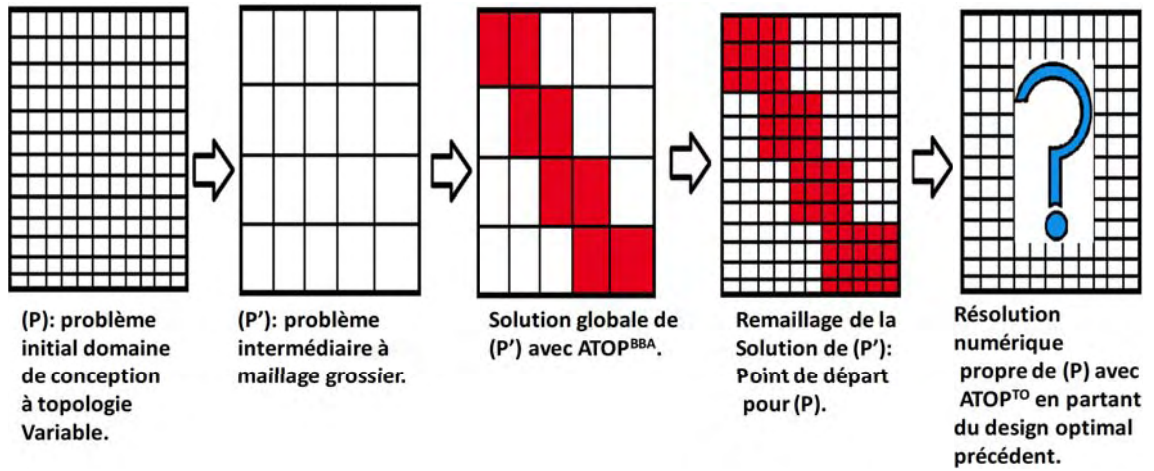


FIGURE 4.2 – Principe de la programmation hybride  $ATOP^{BBA \rightarrow T0}$  : un LSP (P) transformé en un SSP (P') qui est résolu avec  $ATOP^{BBA}$ . L'argmin de (P') est utilisé comme point de départ (P) résolu avec  $ATOP^{T0}$  avec un algorithme d'optimisation locale.

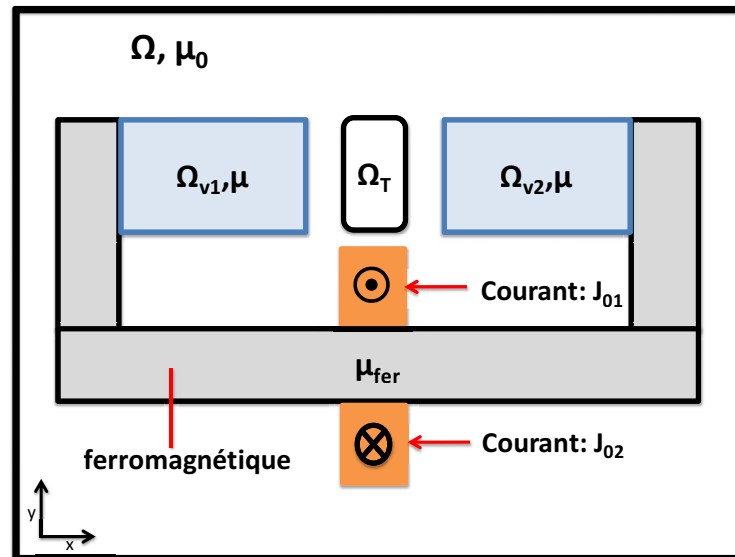
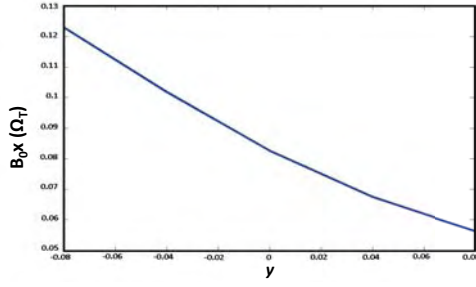
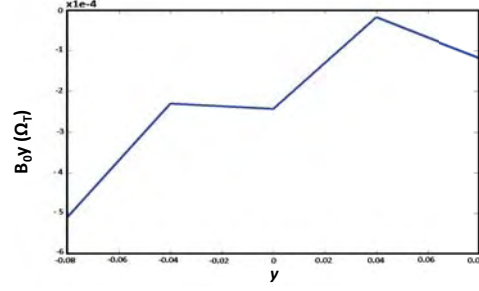
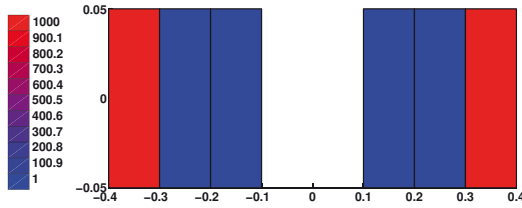


FIGURE 4.3 – Domaine de conception pour le design d'un circuit magnétique élémentaire : deux zones variables  $\Omega_{v1}$  et  $\Omega_{v2}$ . La densité de courant  $\mathbf{J}_0 = (\mathbf{J}_{01}, \mathbf{J}_{02})$  caractérise la bobine (constituant la zone  $\Omega_s$ , see Fig. 4.1). Le centre de la zone cible  $\Omega_T$  occupe l'origine du repère associé au domaine d'étude  $\Omega$ .

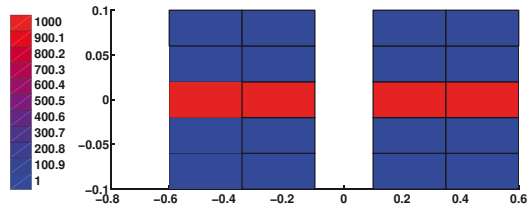
(a) la composante x de  $\mathbf{B}_0$  dans  $\Omega_T$ (b) la composante y de  $\mathbf{B}_0$  dans  $\Omega_T$ FIGURE 4.4 – Les composantes du champ magnétique prescript  $\mathbf{B}_0$  dans  $\Omega_T$ .

deux cellules en matériau ferromagnétique dans chacune des zones  $\Omega_{vi}$ ,  $i = 1, 2$ , ce qui donne  $v_0 = 4$ ).

Dans chacun de ces cas tests, on a obtenu la solution globale au problème inverse que l'on avait construit arbitrairement afin de vérifier l'efficacité de  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$ . Ces solutions sont illustrées sur la Figure 4.5 où la borne inférieure utilisée est  $\text{LB}_2$ . Par ailleurs, on constate qu'avec la borne inférieure  $\text{LB}_1$ , le premier cas test a été résolu en 15 itérations tandis que 4676 itérations ont été nécessaires pour le second cas test (contre seulement 5 et 3477 itérations pour les tests 1 et 2 respectivement avec la borne  $\text{LB}_2$ ). Dans les deux cas, on a intégré aussi la contrainte de volume et la Proposition 4.4. Enfin la valeur de l'objectif est rigoureusement zéro dans les deux cas lors de la résolution numérique.



(a) Premier Cas Test.



(b) Second Cas Test.

FIGURE 4.5 – Deux problèmes SSP résolution globalement avec  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  avec la borne inférieure  $\text{LB}_2$ . (a) Premier cas test résolu avec 5 itérations en 1.19mn. (b) Second cas test résolu en 3477 itérations représentant approximativement 23h.

Sur ces premiers essais, nous obtenons la solution globale avec  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  en un temps de résolution très faible comparativement à la complexité d'un algorithme de type B&B classique (voir la Figure 4.5). Avec  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$ , on obtient deux solutions locales différentes en fonction des points de départ choisis (voir la Figure 4.6). Cela montre clairement que le problème d'optimisation pour la conception optimale de structures électromagnétiques ( $\Pi_\rho$ ) est non convexe et donc très difficile à résoudre tant théoriquement que numériquement. Le choix du point de départ avec  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  est primordial (pour l'algorithme de type gradient utilisé dans le module optimi-

sation). L'un des principaux avantages de  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  est qu'il est efficace et robuste pour le design optimal des circuits magnétiques et permet de trouver des bonnes solutions aux problèmes de conception de type LSP (surtout pour  $N \geq 700$ , voir le chapitre 3 et l'article [76]). Concernant  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$ , il fournit les solutions optimales globales en un nombre fini d'itérations avec un Temps-CPU très élevé contrairement à  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  (voir les Figures 4.5 et 4.6). Il faut remarquer que les contraintes (4.35) et (4.36) données dans la proposition 4.4 jouent un rôle important dans la réduction du nombre d'itérations au cours du processus d'optimisation numérique. Par exemple, sans ces contraintes dans le Test 1, la solution globale est obtenue en 40 itérations au lieu de 15 itérations avec ces contraintes. Dans le tableau 4.6, nous avons fait une comparaison entre  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  et  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  sur le second problème test (20 variables); il ressort d'une part la difficulté pour les méthodes d'optimisation locales de trouver l'optimum global (le design optimal trouvé dépend du point de départ) et d'autre part un temps important même à 20 variables pour que  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  converge (vers la solution globale du problème de conception optimale étudié).

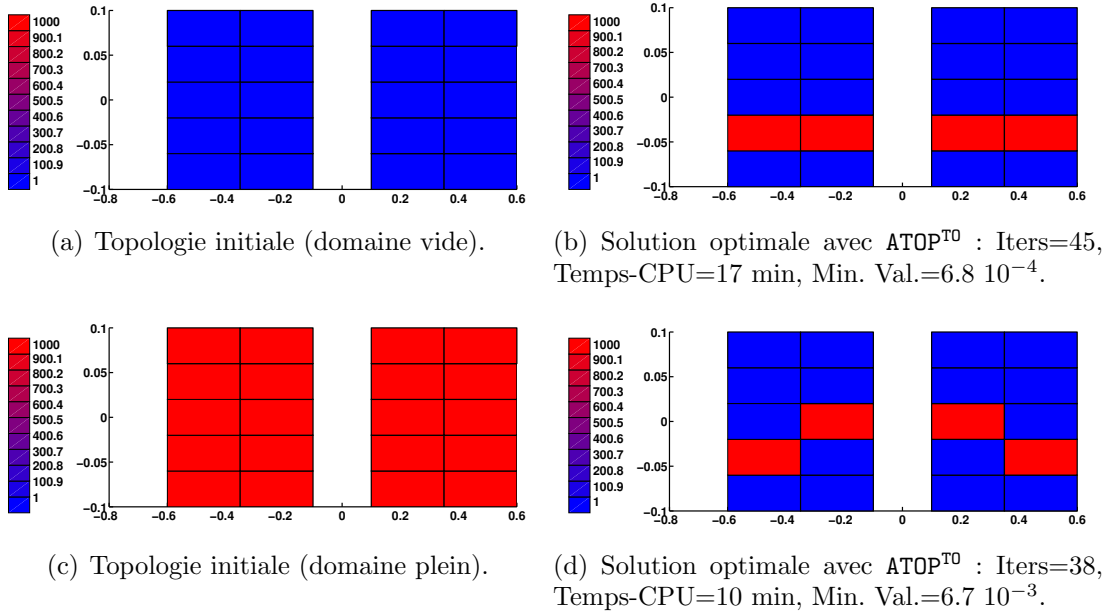


FIGURE 4.6 – Deux solutions locales trouvées avec le code  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  utilisant différents points de départ.

#### 4.6.2 Etudes Détaillées d' $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$

Dans le problème test 2 qui comporte 20 variables, la zone variable  $\Omega_{v2}$  est définie à partir de la solution globale obtenue à la Figure 4.5(b). Nous recherchons le design optimal uniquement dans la zone variable  $\Omega_{v1}$ . Cela constitue un nouveau problème d'optimisation topologique du domaine variable  $\Omega_{v1}$  dont le nombre de mailles est égal à 10 (soit un problème à 10 variables). Dans le tableau 4.2, nous présentons les résultats numériques qui comparent l'efficacité des deux bornes inférieures  $\text{LB}_1$  et  $\text{LB}_2$ , avec ou sans l'intégration des contraintes de volume, des

Code	Nombre d'Itérations	Temps-CPU(min)	Nature de la solution
ATOP <sup>BBA</sup>	3477	1020	0 (minimum global)
ATOP <sup>T0</sup> (vide)	45	17	$6.8 \cdot 10^{-4}$ (minimum local)
ATOP <sup>T0</sup> (plein)	38	10	$6.7 \cdot 10^{-3}$ (minimum local)

TABLE 4.1 – Analyse des solutions obtenues avec ATOP<sup>BBA</sup> et ATOP<sup>T0</sup> le problème test 2.

contraintes additionnelles d'admissibilité des points courants à travers la proposition 4.4. D'après le tableau 4.2, ces tests numériques montrent que dans tous les cas, la borne inférieure calculée  $LB_2$  est la plus efficace. De surcroît, le gain en pourcentage en terme du nombre d'itérations (donc indirectement en temps-CPU) sont tous supérieurs à 13% ; cela peut-être expliqué par la proposition 4.3. Par ailleurs, la borne inférieure  $LB_1$  peut être négative, donc elle peut être très éloignée de la valeur optimale de la fonction de coût, contrairement à la borne inférieure  $LB_2$  qui est toujours positive (comme la fonction objectif  $F(\rho)$ , voir l'équation (4.14) dans le modèle  $(\Pi_\rho)$ ). Comme dans le cas de la résolution numérique avec ATOP<sup>T0</sup>, la prise en compte de la contrainte de volume permet une réduction importante du nombre d'itérations (voir le cas 2 dans le tableau 4.2). Les deux contraintes de la proposition 4.4 induisent aussi une réduction du nombre d'itérations. Nous remarquons aussi que l'utilisation de la Proposition 4.4 est plus efficace lorsque la borne inférieure calculée dans le code B&B est la borne  $LB_1$  (voir le cas 3 du tableau 4.2). Considérant les gains en pourcentage entre le pire et le meilleur des cas ( $LB_1$  dans le cas 1 pour le pire des cas, et  $LB_2$  dans le cas 4 pour le meilleur), nous obtenons des gains d'environ 90% en nombre d'itérations et en temps-CPU. En résumé, nous pouvons conclure qu'il est plus avantageux de faire l'optimisation globale avec ATOP<sup>BBA</sup> muni de la borne  $LB_2$ .

**Remarque 4.4** Le **Gain** est défini par l'erreur relative entre le nombre d'itérations (ou le Temps-CPU) effectué (ou consommé) avec les bornes inférieures  $LB_1$  et  $LB_2$ .

$$\text{Gain} := \frac{\#LB_1 - \#LB_2}{\#LB_1} \quad (4.38)$$

Les différents cas tests avec la borne  $LB \in \{LB_1, LB_2\}$  :

- cas 1 : utilisation de la borne inférieure  $LB$  uniquement,
- cas 2 :  $LB$  + la contrainte de volume (équation (4.16)),
- cas 3 :  $LB$  + la proposition 4.4 (équations (4.35) and (4.36)),
- cas 4 :  $LB$  + la contrainte de volume + la proposition 4.4.

#### 4.6.3 Application du Programme ATOP<sup>BBA->T0</sup> pour le Design Optimal d'un Circuit Magnétique

Nous nous proposons maintenant de tester la technique d'hybridation présentée dans l'Algorithme 3 et illustrée sur la Figure 4.2 sur le même circuit magnétique.

Cas \ LB	Cas 1		Cas 2		Cas 3		Cas 4	
	Iters	T-CPU	Iters	T-CPU	Iters	T-CPU	Iters	T-CPU
LB <sub>1</sub>	1010	392	167	56	432	175	125	45
LB <sub>2</sub>	298	123	122	45	298	120	99	39
<b>Gain (%)</b>	70.5	58.7	26.9	19.6	31.0	31.4	20.8	13.3

TABLE 4.2 – Etudes comparatives entre bornes inférieures LB<sub>1</sub> et LB<sub>2</sub>.

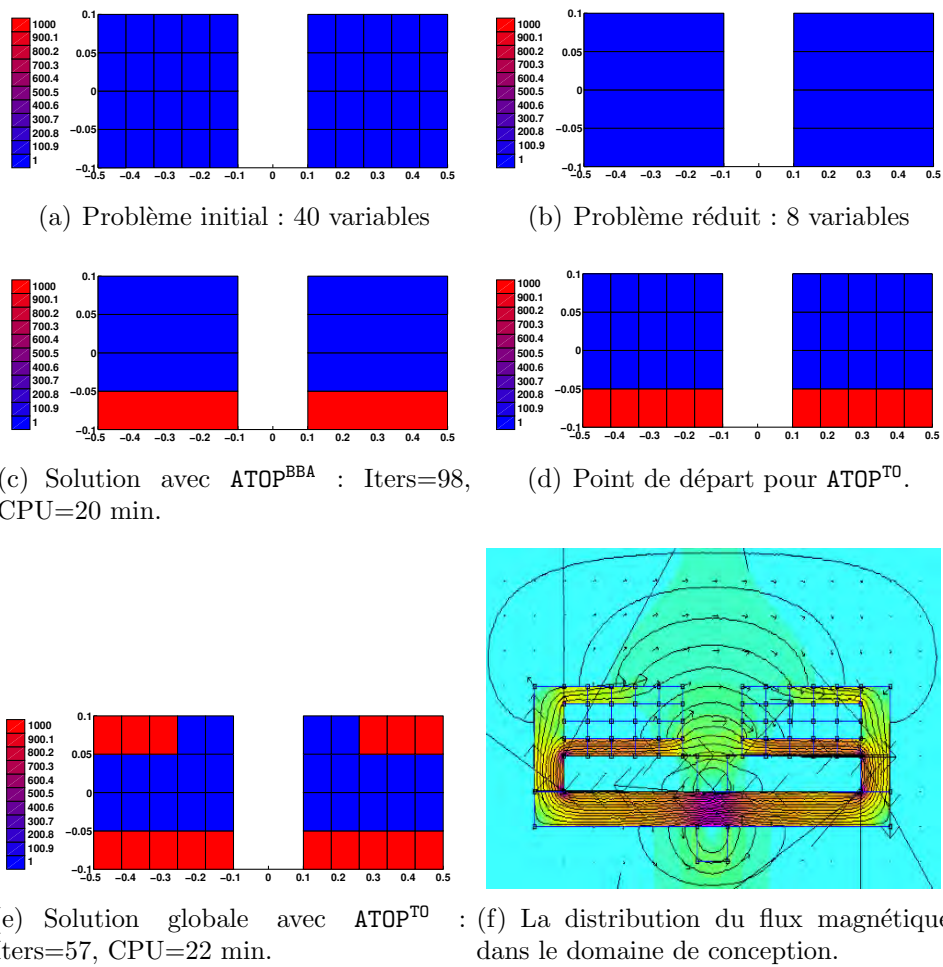
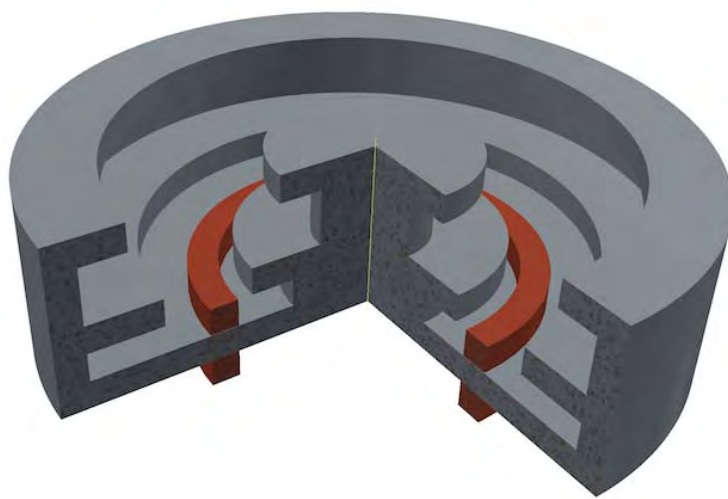
Compte tenu des résultats précédents, nous avons opté pour la borne inférieure LB<sub>2</sub>. Les résultats numériques de cet exemple d'application sont présentés sur la Figure 4.7.

L'utilisation de la contrainte de volume n'est pas toujours possible immédiatement car il faudrait l'adapter au maillage grossier (pour le problème réduit (P')), voir la Figure 4.2). En effet, cette contrainte est donnée pour le problème de design initial (P). Selon le type de maillage grossier choisi pour le second problème de design (P'), on pourra si nécessaire faire quelques calculs supplémentaires afin d'établir la contrainte de volume correspondante pour (P') et l'intégrer dans le module de résolution de  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$ . Le cas échéant cela ne constitue pas en soi une difficulté préoccupante car notre programme d'optimisation topologique globale peut converger sans la prise de cette contrainte de volume (en général cela implique plus d'itérations, voir la Section 4.6.2).

Finalement pour valider l'efficacité de notre technique d'hybridation, nous l'appliquons sur un problème de conception à 40 variables pour lesquelles la solution globale est connue, voir [76] pour une description précise de ce problème. Nous utilisons comme point de départ la solution optimale globale obtenue avec  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  sur un problème réduit (P') à 8 variables (voir la Figure 4.7(b)) et sans contrainte de volume. La solution obtenue en 4.7(c) est convertie en un design initial 4.7(d) pour  $\text{ATOP}^{\text{TO}}$ , la solution globale en 4.7(e) est obtenue grâce au code hybride  $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{TO}}$ . La solution concrète pour le design de ce circuit magnétique est illustrée sur la Figure 4.8.

## 4.7 Conclusion

Grâce à l'arithmétique d'intervalles, nous avons effectué des calculs de bornes pour notre fonction coût. Ces bornes utilisées dans un code de type B&B plus précisément, le solveur d'optimisation globale déterministe IBBA, nous a permis d'élaborer un code d'optimisation topologique  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  capable de résoudre globalement le modèle binaire de notre problème de conception. Cela nous évite l'étape de pénalisation qui est normale en utilisant des approches continues basée sur les méthodes d'optimisation de type gradient. Cependant  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  reste efficace uniquement pour des problèmes de la classe SSP. Afin d'exploiter ce code dans la résolution des problèmes LSP, une technique d'hybridation  $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{TO}}$  a été mise

FIGURE 4.7 – Application de l'approche heuristique hybride  $ATOP^{BBA \rightarrow T0}$ .FIGURE 4.8 – La réalisation 3D du circuit optimale correspondant à la solution (en 2D) obtenue avec  $ATOP^{BBA \rightarrow T0}$ .

---

en place ; celle-ci consiste à utiliser successivement les deux codes  $\text{ATOP}^{\text{BBA}}$  et  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$ . Cette combinaison a été appliqué avec succès sur un vrai problème de conception optimale de circuit magnétique élémentaire étudié dans [76].





## Chapitre 5

### Minimisation de la densité de courant avec $\text{ATOP}^{\text{T0}}$

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, un nouveau critère lié à la minimisation de la densité de courant qui alimente les électro-aimants va être considéré. La minimisation des densité de courant implique la minimisation de la puissance électrique consommée par les propulseurs électriques). Ainsi, cette optimisation est fondamentale pour notre application de design de circuits magnétiques de propulseurs plasmiques (PEHs). En effet, le plus souvent au cours de leur fonctionnement la mise en veille de la sonde ou de la navette spatiale est due à un manque de ressource d'énergie électrique. Le plus souvent, les engins spatiaux sont équipés de panneaux solaires larges et ou rotatifs (en fonction de la position des rayons solaire qui doivent charger leurs cellules photovoltaïques). À force d'adapter ces panneaux au besoin de la navette en terme de sa consommation en puissance électrique, on se voit augmenter les charges de la mission spatiale. D'où l'intérêt de considérer de tel critère d'optimisation pouvant réduire la consommation d'énergie de l'engin considéré. Pour ce nouveau problème, le code ATOP<sup>T0</sup> est utilisé avec le SIM uniforme  $f_n^u$  proposé dans le Chapitre 3 pour la résolution numérique. Pour ce problème de design associant des sources et des matériaux, le problème d'optimisation obtenu est mixte (variables continues et discrètes). Cependant, des techniques de relaxation identiques à celles appliquées aux formulations  $(\varphi)$  et  $(\varphi_\rho)$  précédemment étudiées seront utilisées. Néanmoins, les densités de courant dans les bobines seront paramétrés avec un SIM linéaire (ou sans étape de pénalisation) car celles-ci sont déjà des variables continues et n'ont donc pas besoin d'être relaxées. Par conséquent, ce modèle sera dit Mixed-SIMP (M-SIMP).

## 5.2 Description du Problème

Dans ce problème, la région à topologie variable  $\Omega_v$  est formée de deux zones :  $\Omega_{m1}$  et  $\Omega_{m2}$  pour la répartition optimale de matériaux ferromagnétiques ; quatre positions de source  $\Omega_{s1}$ ,  $\Omega_{s2}$ ,  $\Omega_{s3}$  et  $\Omega_{s4}$  où l'on doit trouver les densités minimales de courant. Le domaine d'étude  $\Omega$  est donné sur la Figure 5.1. Dans ce problème de conception de circuits magnétiques, les zones à topologie variable  $\Omega_{m1}$  et  $\Omega_{m2}$  font partie intégrante du circuit magnétique à configurer. Plus précisément, ces zones correspondent à l'emplacement des pièces polaires (avec : la *pièce polaire interne* dans la zone  $\Omega_{m1}$  et la *pièce polaire externe* dans la zone  $\Omega_{m2}$ , voir la Figure 5.1 et aussi la Section 1.5.1.4 du Chapitre 1). Ainsi, le circuit magnétique cherché est celui qui réalisera une consommation minimale de la densité de courant avec une topologie optimale des pièces polaires. En courant continu, une fonctionnelle coût adéquate serait :

$$W = \int_{\Omega} A \mathbf{J} d\Omega. \quad (5.1)$$

En effet, dans le domaine traité, la densité de courant qui travers les sections planes des bobines ont le même sens de circulation que le potentiel vecteur  $A$  (dans les mêmes sections), il vient que  $W$  est une quantité positive. En absence d'aimant

permanent dans l'équation de Maxwell-Ampère (2.45), la densité de courant  $J$  devient l'unique terme source ; par conséquent  $J$  et  $A$  ont le même sens de variation à travers l'équation (5.3). De plus, avec cette fonctionnelle  $W$ , le problème de conception optimale obtenu  $(\mathfrak{P})$  sera auto-adjoint (après l'analyse de sa sensibilité)

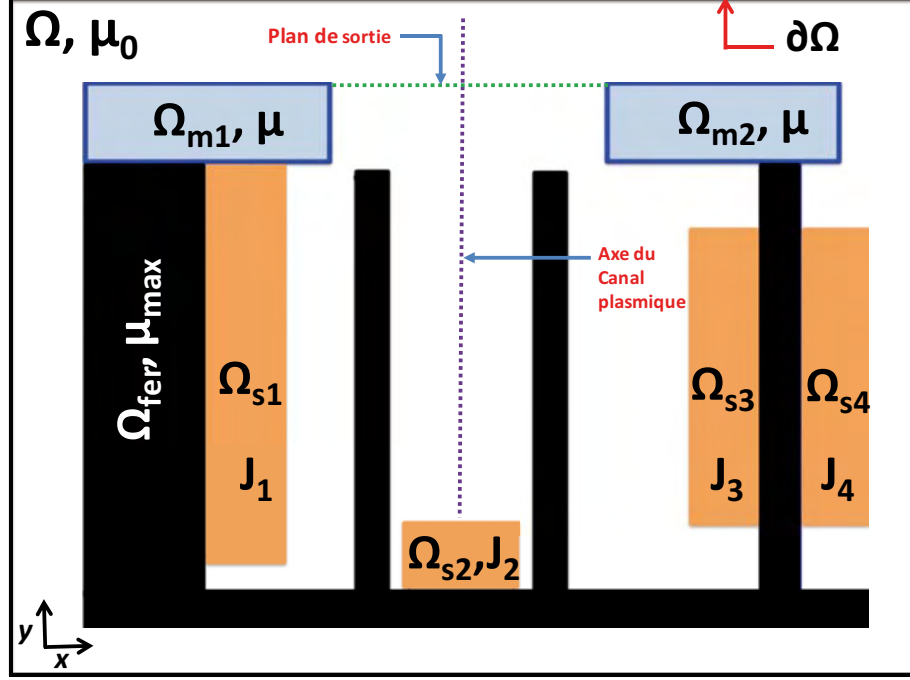


FIGURE 5.1 – Domaine de conception pour le problème de minimisation d'énergie.

### 5.2.1 Formulation du Problème

En considérant, le modèle magnétostatique venant des équations de Maxwell-Ampère comme précédemment dans le Chapitre 2 (dans la formulation du problème  $(\wp)$ ), on peut formuler le problème comme suit :

$$(\mathfrak{P}) \begin{cases} \min_{\mathbf{p}} W(\mathbf{p}) = \int_{\Omega} A(\mathbf{p}) \mathbf{J}(\mathbf{p}) d\Omega, & (5.2) \\ \text{s.c. :} \\ -\nabla \times [\nu(\mathbf{p}) \mathbf{B}(A)] + \mathbf{J}(\mathbf{p}) = 0, \text{ dans } \Omega, \text{ et } A|_{\partial\Omega} = 0, & (5.3) \\ \mathbf{p} \in \mathcal{P}_w. & (5.4) \end{cases}$$

Dans le modèle  $(\mathfrak{P})$ , on a :

1. Le critère  $W$  est comparable à celle du double d'une énergie magnétique [193, 194].
2. Le paramètre de conception,  $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}^s, \mathbf{p}^m\}$ , avec  $\mathbf{p}^s$  la composante désignant les sources magnétiques (courant  $\mathbf{J}$ ) et la composante  $\mathbf{p}^m$  désignant le matériau utilisé (propriété du milieu magnétique : perméabilité magnétique  $\mu$  ou réluctivité magnétique  $\nu$ ).

3. L'ensemble admissible,  $\mathcal{P}_w$  est donné par :

$$\mathcal{P}_w = \left\{ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}_{\min}, \mathbf{p}_{\max}] : \int_{\Omega_m} \mathbf{p}_m d\Omega = V_0; \mathcal{I}(\mathbf{p}^s) \leq 0; \mathcal{E}(\mathbf{p}^s) = 0; \mathbf{B}(A) \in \mathcal{C}_{\Omega_T} \right\}, \quad (5.5)$$

où  $\mathbf{p}_{\min}$  et  $\mathbf{p}_{\max}$  sont les bornes du paramètre  $\mathbf{p}$ ,  $\Omega_m$  est égale à l'union  $\Omega_{m1} \cup \Omega_{m2}$ ,  $V_0$  est le volume limite du matériau ferromagnétique utilisé pour le design. L'inégalité  $\mathcal{I}(\mathbf{p}^s)$  et l'égalité  $\mathcal{E}(\mathbf{p}^s)$  sont des contraintes linéaires sur les densités de courant dans les bobines. Par exemple, on peut imposer que les courants  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  soient plus petits que les courants  $\mathbf{J}_3$  et  $\mathbf{J}_4$ . L'égalité  $\mathcal{E}(\mathbf{p}^s)$  peut-être la loi d'Ohm et/ou une contrainte de position « aller-retour » en considérant la section plane d'une bobine (typiquement comme dans les zones de sources  $\Omega_{s3}$  et  $\Omega_{s4}$ , on impose  $\mathbf{J}_3 = \mathbf{J}_4$ ), voir la Figure 5.1.

Quant à la condition  $\mathbf{B}(A) \in \mathcal{C}_{\Omega_T}$ , elle permet de prendre en compte la topologie de la cartographie magnétique à l'intérieur et au voisinage immédiat du propulseur, notamment : –la position spatiale et l'intensité maximale de l'induction du champ magnétique produit par le dispositif ; –l'imposition de zone(s) de champ magnétique nul (en général au niveau de l'anode) ; –les variations du champ magnétique suivant l'axe du canal céramique<sup>1</sup> (aussi connu sous le nom de gradient du champ magnétique) ; –les formes et courbures des lentilles magnétiques (surtout au niveau du plan de sortie du moteur) ; etc, [2, 15, 195, 196]. Ainsi, cette dernière contrainte sur le flux magnétique créé par le circuit à concevoir induit au problème ( $\mathfrak{P}$ ) son aspect de problème inverse d'électromagnétisme. Dans les applications numériques, on prendra l'ensemble  $\mathcal{C}_{\Omega_T}$  comme suit :

$$\mathcal{C}_{\Omega_T} = \{ \mathbf{B} : \alpha_{\min} \leq \alpha(\mathbf{B}) \leq \alpha_{\max} \text{ dans } \Omega_{T1}; \|\mathbf{B}\| \leq \mathbf{B}_{0,\max} \text{ dans } \Omega_{T2} \}, \quad (5.6)$$

avec  $\Omega_{T1}$  le segment de l'axe du plan de sortie reliant les longueurs supérieures des deux zones  $\Omega_{m1}$  et  $\Omega_{m2}$ .  $\Omega_{T2}$  le segment de l'axe du canal plasma reliant le centre du côté supérieur de la zone  $\Omega_{s2}$  et le milieu du segment  $\Omega_{T1}$  (on posera  $\Omega_T = \Omega_{T1} \cup \Omega_{T2}$ ).  $\mathbf{B}_{0,\max}$  est une borne supérieure sur la valeur du module du profil de l'intensité de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  en fonction des points de  $\Omega_{T2}$  (le plus souvent, cette valeur maximale du champ est atteinte au voisinage du plan de sortie du canal). Une illustration se trouve sur les Figures 5.1, 5.2 et 5.3. La fonction angulaire  $\alpha(\mathbf{B})$  mesure l'inclinaison des lentilles magnétiques au centre du canal céramique. Elle est donnée par [15] :

$$\alpha(\mathbf{B}) = \text{atan} \left( \frac{\mathbf{B}_y}{\mathbf{B}_x} \right). \quad (5.7)$$

---

1. Cette variation du gradient du champ magnétique est donnée par [196] :

$$F_{\mathbf{B}}(x) = \left| \frac{\mathbf{B}(x) \times \nabla |\mathbf{B}(x)|}{|\mathbf{B}(x)|} \right|$$

### 5.2.2 Formulation M-SIMP du problème $(\mathfrak{P})$

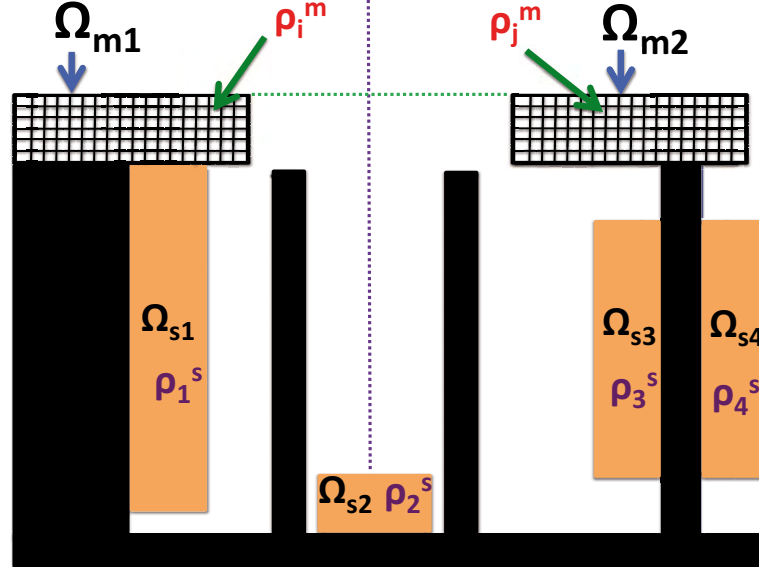


FIGURE 5.2 – Domaine de conception discrétisé pour l'approche M-SIMP.

Pour la résolution numérique, on propose une approche M-SIMP (Mixed-SIMP), avec le SIM uniformes  $f_n^u$ . Par la suite, les paramètres de design qui sont la distribution de matériaux et de sources dans le domaine de conception discret sont interpolés comme suit :

$$\mathbf{p} = \{\mathbf{p}^s, \mathbf{p}^m\} = \{f_{n_1}^u(\rho^s), f_{n_2}^u(\rho^m)\}, \quad \forall \rho := \{\rho^s, \rho^m\} \in [0, 1] \times [0, 1]. \quad (5.8)$$

Avec la fonction de densité  $\rho$  ayant deux composantes globales  $\rho^s$  et  $\rho^m$  définissant les variables de courant et de perméabilité respectivement, voir la Figure 5.2. Une formulation par la méthode de densité du problème d'optimisation  $(\mathfrak{P})$  est :

$$(\mathfrak{P}_\rho) \begin{cases} \min_{\rho} W(\rho), & (5.9) \\ \text{s.c. :} & \\ h_A(\rho) = 0, & (5.10) \\ A_i \rho \leq b_i, & (5.11) \\ A_e \rho = b_e, & (5.12) \\ \mathcal{B}(\rho) \in \mathcal{C}_{\Omega_T}, & (5.13) \\ 0 \leq \rho \leq 1. & (5.14) \end{cases}$$

où :  $h_A$  est la fonction définissant l'EDP (5.3) en terme de la densité  $\rho$ . Les équations algébriques (5.11), (5.12), (5.13) et les bornes (5.14) correspondent aux contraintes définissant le domaine admissible  $\mathcal{P}_w$ , voir la définition (5.5).

**Proposition 5.1** *Le gradient topologique du problème  $(\mathfrak{P}_\rho)$  est donné par :*

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} = \int_{\Omega} \left[ 2A \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial f_n^u} - \frac{\partial \nu}{\partial f_n^u} \mathbf{B}(A)^2 \right] \cdot \frac{\partial f_n^u}{\partial \rho} d\Omega, \quad (5.15)$$

où :

$$-\nabla \times [\nu(\mathbf{p})\mathbf{B}(A)] + \mathbf{J}(\mathbf{p}) = 0, \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (5.16)$$

**Preuve:** On procède de manière analogue à la preuve de la proposition 1 du chapitre 2 avec une MVA, en introduisant un Lagrangien et une variable adjointe (appelée aussi multiplicateur de Lagrange) associés au critère  $W$  et à la contrainte EDP (5.3) dans le problème de conception ( $\mathfrak{P}$ ). Avec les conditions de stationnarité de ce Lagrangien, le système adjoint et la dérivée  $\partial W/\partial \mathbf{p}$  sont déterminés. Ensuite, avec la loi de dérivation des fonctions composées, la formule de la sensibilité du problème de la minimisation de la densité de courant (5.15) s'en suit. Ici, je redonnerai les grandes lignes de la preuve.

1. *Calcul du Lagrangien associé au critère  $W$*  : notons  $\mathcal{W}$  ce Lagrangien associé au problème  $\mathfrak{P}$  à travers le critère  $W$  et d'une formulation variationnelle de l'équation de Maxwell-Ampère (5.3). Il peut-être alors défini pour tout  $(\mathbf{p}, A, \lambda) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  par,

$$\mathcal{W}(\mathbf{p}, A, \lambda) = W(\mathbf{p}) + \int_{\Omega} \lambda [-\nabla \times [\nu(\mathbf{p})\mathbf{B}(A)] + \mathbf{J}(\mathbf{p})] d\Omega. \quad (5.17)$$

En utilisant la technique d'intégration par parties donnée dans le Théorème 1 du chapitre 2 et de la définition du vecteur potentiel  $A$  ( $\mathbf{B}(A) = \text{rot}(A)$ ), l'expression de  $\mathcal{W}$  devient :

$$\mathcal{W}(\mathbf{p}, A, \lambda) = \int_{\Omega} A \mathbf{J}(\mathbf{p}) d\Omega + \int_{\Omega} [\lambda \mathbf{J}(\mathbf{p}) - \nu(\mathbf{p})\mathbf{B}(A)\mathbf{B}(\lambda)] d\Omega. \quad (5.18)$$

2. *Le système adjoint correspondant* : un triplet  $(\mathbf{p}^*, A^*, \lambda^*)$  satisfait la condition d'optimalité du premier ordre pour la fonctionnelle augmentée  $\mathcal{W}$  si le gradient  $\mathcal{W}$  est nul en ce point c'est-à-dire :  $\nabla \mathcal{W}(\mathbf{p}^*, A^*, \lambda^*) = 0$ . En particulier la dérivée partielle de  $\mathcal{W}$  par rapport à  $A$  noté  $\partial \mathcal{W}/\partial A$  est nulle en ce point. Cette condition donne l'égalité suivante :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial A}(\mathbf{p}^*, A^*, \lambda^*), \varphi \right\rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (5.19)$$

En développant l'expression de gauche dans l'égalité (5.19), compte tenu de la définition (5.18), elle devient,

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial A}(\mathbf{p}^*, A^*, \lambda^*), \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} [\varphi \mathbf{J}(\mathbf{p}^*) - \nu(\mathbf{p}^*)\mathbf{B}(\varphi)\mathbf{B}(\lambda^*)] d\Omega, \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (5.20)$$

En annulant la formulation différentielle faible (5.20) (suivant la condition KKT (5.19)), la formulation forte résultante (par application du théorème de Green) est :

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}^*) - \nabla \times [\nu(\mathbf{p}^*)\mathbf{B}(\lambda^*)] = 0. \quad (5.21)$$

Ainsi, le triplet  $(\mathbf{p}^*, A^*, \lambda^*)$  est optimal pour  $\mathcal{W}$  si  $\lambda^*$  est solution du système (5.21). De manière analogue, la condition de stationnarité de  $\mathcal{W}$  par rapport à  $\lambda$  donne le système primal (5.3) dont la composante  $A^*$  est solution.

3. *Calcul de la sensibilité de  $W$*  : Pour tout triplet  $(\mathbf{p}, A, \lambda)$  tel que le couple  $(\mathbf{p}, A)$  soit réalisable pour le problème  $\mathfrak{P}$ , les fonctions  $W$  et  $\mathcal{W}$  sont égales (pour  $\lambda$ ). D'où, il s'ensuit naturellement que,

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, A, \lambda) = W'(\mathbf{p}), \quad \forall \lambda. \quad (5.22)$$

De l'indépendance des variables  $\mathbf{p}$ ,  $A$  et  $\lambda$ , dans la définition de  $\mathcal{W}$ , et du fait que les fonctionnelles définissant les champs magnétique, les propriétés des matériaux et les sources sont bornées, alors en utilisant les propriétés de dérivation sous le signe intégral, à partir de l'expression (5.18), nous obtenons la dérivée partielle de  $\mathcal{W}$  par rapport à  $\mathbf{p}$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, A, \lambda) = \int_{\Omega} \left[ (\lambda + A) \frac{\partial J(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \nu(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B}(A) \mathbf{B}(\lambda) \right] d\Omega. \quad (5.23)$$

Par la suite, en remarquant que le système adjoint (5.21) est identique au système primal (5.3) (de plus  $\lambda|_{\partial\Omega} = 0$ ), il s'ensuit que les points  $(\mathbf{p}, A, \lambda)$  qui sont critiques pour  $\mathcal{W}$  vérifient la condition de l'*auto-adjoint*  $A = \lambda$ . En combinant, cette remarque à la relation (5.22), on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, A, \lambda) = \int_{\Omega} \left[ 2A \frac{\partial J(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \nu(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B}(A)^2 \right] d\Omega. \quad (5.24)$$

Finalement, avec l'interpolation  $\mathbf{p} = f_n^u(\rho)$ ,  $\forall \rho \in [0, 1]$ , la loi de dérivation des fonctions composées permet de passer de l'expression (5.24) au gradient de  $W$  par rapport à la variable  $\rho$ . ■

**Remarque 5.1** *La résolution numérique du problème  $(\mathfrak{P}_\rho)$  est relativement simple par rapport au problème  $(\varphi_\rho)$  en terme de temps CPU. En effet, le modèle d'optimisation topologique  $(\mathfrak{P}_\rho)$  étant auto-adjoint l'évaluation du gradient topologique (5.15) ne nécessite qu'une seule résolution par éléments finis (seulement l'équation de Maxwell-Ampère (5.3)). Contrairement au problème de critère moindre carré  $(\varphi_\rho)$  où la résolution d'un état adjoint est indispensable.*

## 5.3 Applications Numériques

Considérons un exemple d'application de conception de circuits magnétiques pour PEH où chacune des deux zones variables  $\Omega_{m1}$  et  $\Omega_{m2}$  est discrétisée en  $30 \times 15$  mailles (pour les variables d'optimisation associée aux densités de matériau ferromagnétique), à quoi il faut ajouter les quatre zones de densités de courant ( $\Omega_{s1}, \Omega_{s2}, \Omega_{s3}$ , et  $\Omega_{s4}$ ).

- Les bornes inférieures et supérieures des paramètres de conception  $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}^s, \mathbf{p}^m\}$  sont :
  - pour les sources :  $\{\mathbf{p}_{\min}^s, \mathbf{p}_{\max}^s\} = \{-3, +3\}$  (A/mm<sup>2</sup>)
  - pour le matériau :  $\{\mathbf{p}_{\min}^m, \mathbf{p}_{\max}^m\} = \{4\pi 10^{-7}, 4\pi 10^{-7} \times 8000\}$  (H/m)
- Le nombre  $N$  de variables de conception est :

$$N = \underbrace{4}_{\rho^s = (\rho_1^s, \dots, \rho_4^s)} (\text{Sources}) + \underbrace{2 \times 30 \times 15}_{\rho^m = (\rho_1^m, \dots, \rho_{900}^m)} (\text{Material}) = \underbrace{904}_{\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{904})}. \quad (5.25)$$

- Les contraintes linéaires sont :
  - pour les sources :  $\rho_3^s = \rho_4^s$  et  $\sum \rho_i^s \leq 2$ .
  - pour les matériaux :  $\sum \rho_i^m = v_0$ .
- Les contraintes sur le profil du champ magnétique sont :
  - l'inclinaison des lentilles magnétiques :  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ ,  
 $\alpha_{\min} = -10$ ;  $\alpha_{\max} = +10$  (en degré).
  - l'intensité maximale du champ est  $\mathbf{B}_{0,\max} = 0,04\text{T}$ .

Dans les simulations numériques, en plus du profil du champ au centre du canal (**CL** : Center Line), une analyse du comportement du profil de la cartographie magnétique générée par le circuit optimal au niveau des parois internes (**IW** : Inner Wall) et externes (**OW** : Outer Wall) du canal céramique, voir la Figure 5.3 a aussi été effectuée. Pour ainsi avoir une vision plus globale et beaucoup plus précise sur la topologie magnétique trouvée. Dans ces cas tests, on a utilisé un facteur de pénalisation  $n$  égale à 50 avec la formulation uniforme  $f_n^u$  (pour le paramétrage de  $\rho^m$ ).

### 5.3.1 Cas Tests pour Différents Volumes de Matériau

Deux cas tests ont été considérés ici : à savoir, un premier test avec  $v_0 = 60\% * Vol(\Omega_m)$  (noté **T1**) et un deuxième avec  $v_0 = 40\% * Vol(\Omega_m)$  (noté **T2**). Pour ces applications de design, sur la courbe montrant les densités optimales de courant en abscisse, les quatre sections de bobines sont désignées par **Coil Int** (pour  $\mathbf{J}_1$  dans la zone  $\Omega_{s1}$ ), **Coil Arr** (pour  $\mathbf{J}_2$  dans la zone  $\Omega_{s2}$ ), **Coil Ext1** (pour  $\mathbf{J}_3$  dans la zone  $\Omega_{s3}$ ) et **Coil Ext2** (pour  $\mathbf{J}_4$  dans la zone  $\Omega_{s4}$ ), voir les résultats numériques sur les Figures 5.2, 5.6(b) et 5.12(b). Les résultats numériques obtenus au cours du processus d'optimisation sont résumés dans le Tableau 5.3.2.

### 5.3.2 Analyse des Résultats Numériques

Ces tests numériques valident notre approche d'optimisation, et confirment l'efficacité et la robustesse du programme ATOP<sup>T0</sup>. Dans les 2 tests les valeurs de la norme du champ au centre de la chambre de décharge (canal plasma) restent en dessous de la valeur limite imposée ( $\mathbf{B}_{0,\max} = 0,04\text{T}$ ), voir les Figures 5.7(a) et 5.13(a). Sur les Figures 5.7(a) et 5.13(a), on note que pour les circuits électromagnétiques optimaux obtenus, la cartographie de champ magnétique généré possède dans  $\Omega_{T2}$  un module un peu éloigné de  $\mathbf{B}_{0,\max}$  cela respecte bien la contrainte (imposée dans



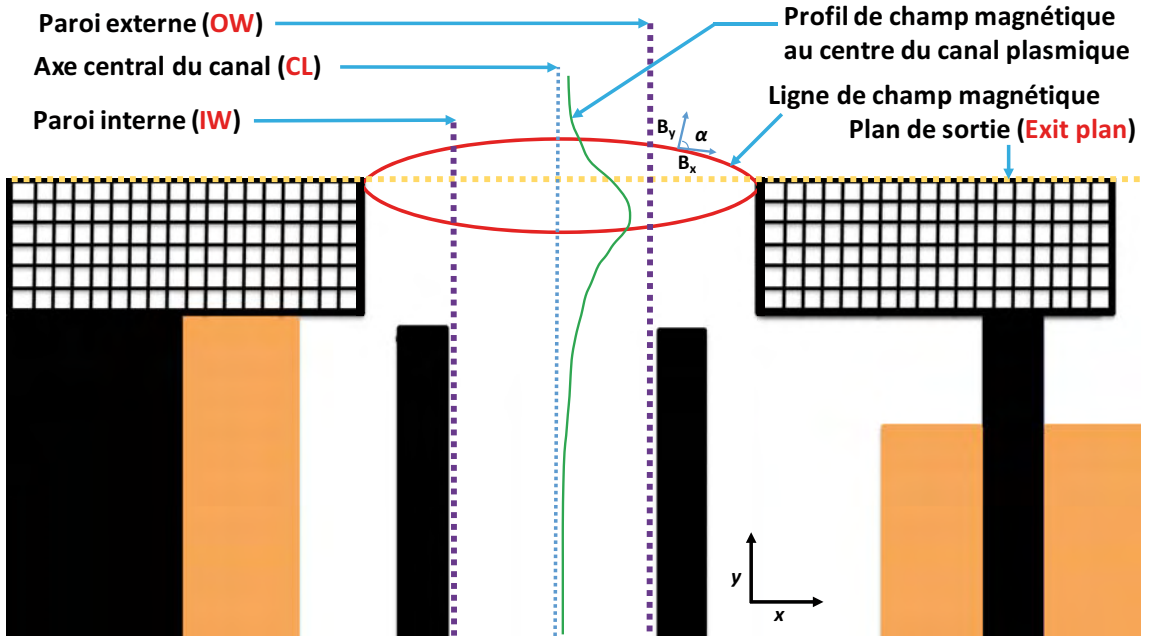
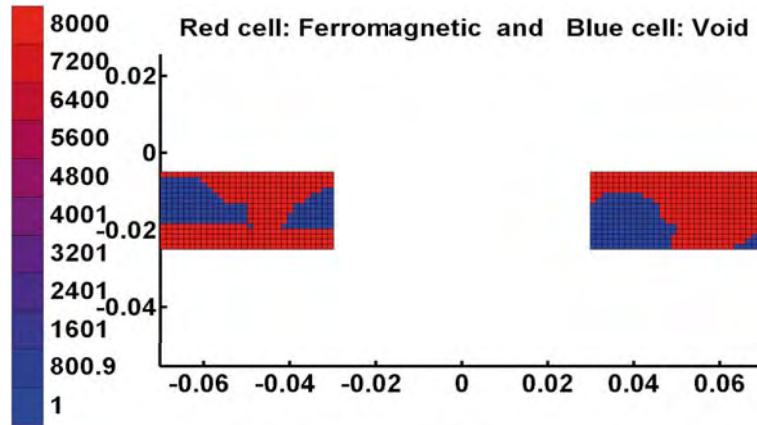


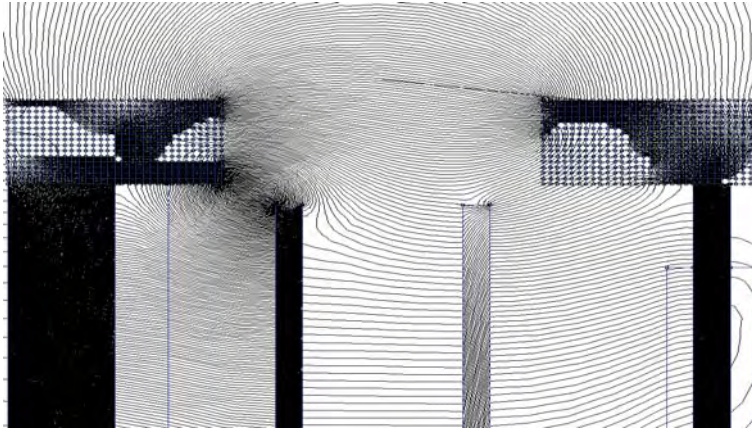
FIGURE 5.3 – Illustration graphique de l'inclinaison  $\alpha$  et les régions d'analyse du profil du champ magnétique : la paroi interne (IW : Inner Wall), l'axe central (CL : Center Line) et la paroi externe (OW : Outer Wall) et le plan de sortie du canal plasmique.

cette zone de canal plasma). Il est possible si nécessaire (surtout pour les ingénieurs) d'ajouter une borne inférieure  $B_{0,\min}$  pour encadrer ce module radial du champ magnétique comme celles de l'inclinaison  $\alpha$  (voir l'équation (5.6)). L'inclinaison des lentilles magnétiques pour **T2** reste dans la fourchette des valeurs souhaitées (voir la Figure 5.13(b)). Par contre, dans le cas test **T1**, cette inclinaison  $\alpha$  dépasse légèrement la valeur minimale imposée  $\alpha_{\min} = -10^\circ$  (voir la Figure 5.7(b)). En pratique cette contrainte est très utile car elle peut permettre de prévenir le phénomène d'érosion (en imposant à cet effet une topologie de champ de magnétique ayant des lentilles magnétiques beaucoup plus inclinées par rapport aux pièces polaires typiquement comme celles du Magnétique Shielding à l'intérieur du moteur). Avec ces résultats numériques, il apparaît que pour créer une zone de champ magnétique nul dans le canal plasma sur cet exemple d'application, il faut que la densité de courant dans  $\Omega_{s2}$  soit très proche de zéro. Dans ce cas, les écrans magnétiques servent de boucliers efficaces pour empêcher les lignes de champ d'envahir l'intérieur du canal plasmique (c'est ce type de distribution de flux magnétique qui est souhaité dans le cadre de certaines configurations magnétiques des PEHs), voir les Figures 5.4(b) et 5.10(b) (voir aussi les Figures 5.5 et 5.11).

Par ailleurs, ces résultats numériques montrent bien que la condition aux limites imposée sur le potentiel vecteur (dans le modèle ( $\mathfrak{P}$ )) est satisfaite (de même les champs magnétiques  $\mathbf{B}$  produis par les circuits magnétiques ainsi obtenus sont nuls à l'infini en particulier au niveau de la frontière  $\partial\Omega$  du domaine de conception  $\Omega$ ) ; ceci est montré sur les Figures 5.9 et 5.15. Sur l'exemple numérique **T2**, il est à



(a) Topologie optimale



(b) Distribution du flux magnétique

FIGURE 5.4 – Solution topologique optimale pour **T1** :  $\text{Nb}_{\text{Iter}} = 0$ ,  $W(\rho^0) = 35,4$  et  $\text{Nb}_{\text{Iter}} = 110$ ;  $W(\rho^{\text{opt}}) = 0,48$ .

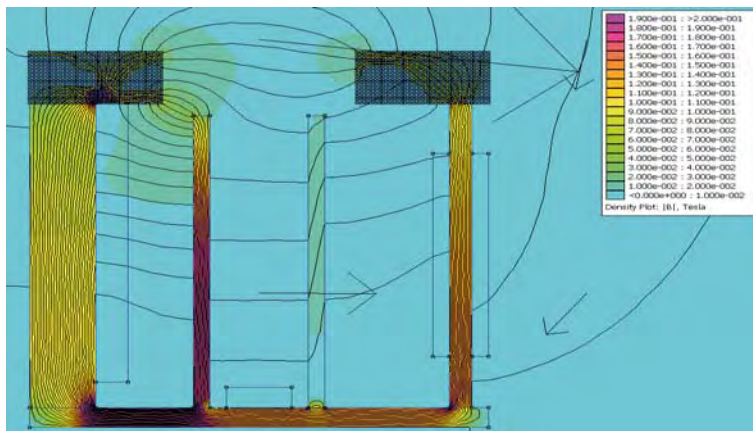
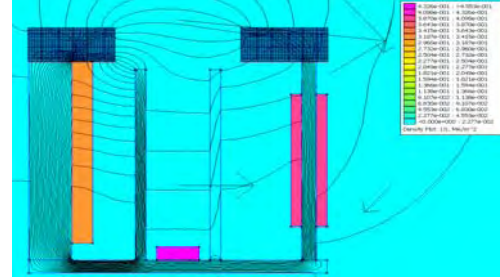
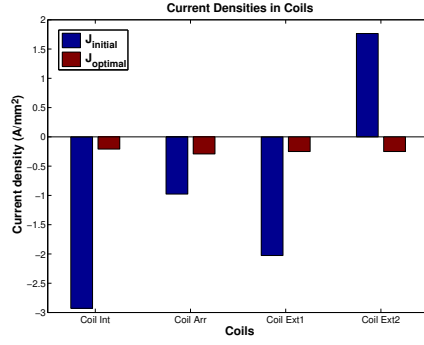
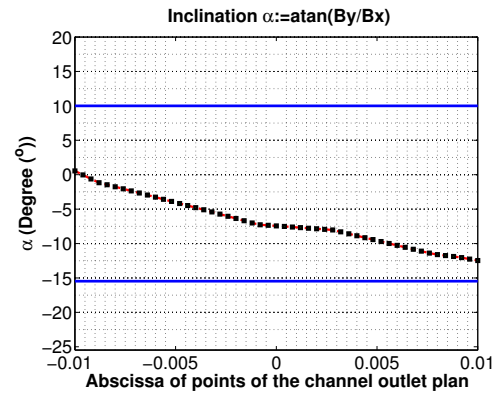
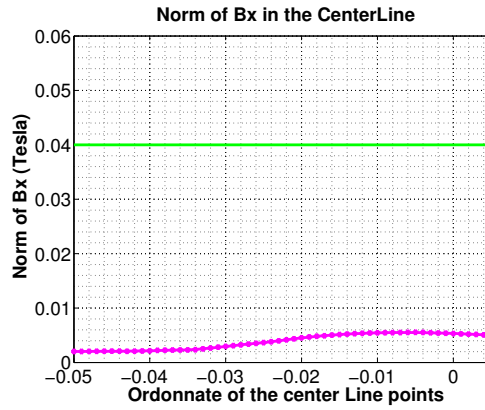


FIGURE 5.5 – Distribution de l'intensité du module du flux magnétique dans le domaine de conception  $\Omega$  (pour **T1**).



(a) Les Densités de Courant initiales ( $J_{\text{initial}}$ ) et optimales ( $J_{\text{optimal}}$ ). (b) Distribution spatiale des densités de courant optimales dans le domaine de conception.

FIGURE 5.6 – Densités de courant optimales pour **T1**.



(a) Module de la composante radiale du champ  $\mathbf{B}$  au centre du canal plasma. (b) L'inclinaison de lentille au niveau du plan de sortie.

FIGURE 5.7 – Contraintes imposées sur la topologie de la cartographie magnétique produite par le circuit optimal (pour **T1**).

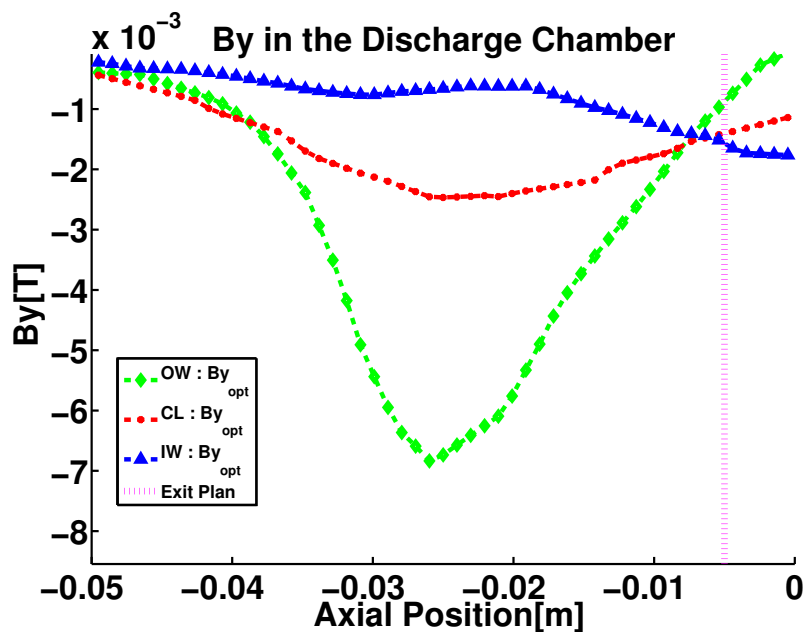
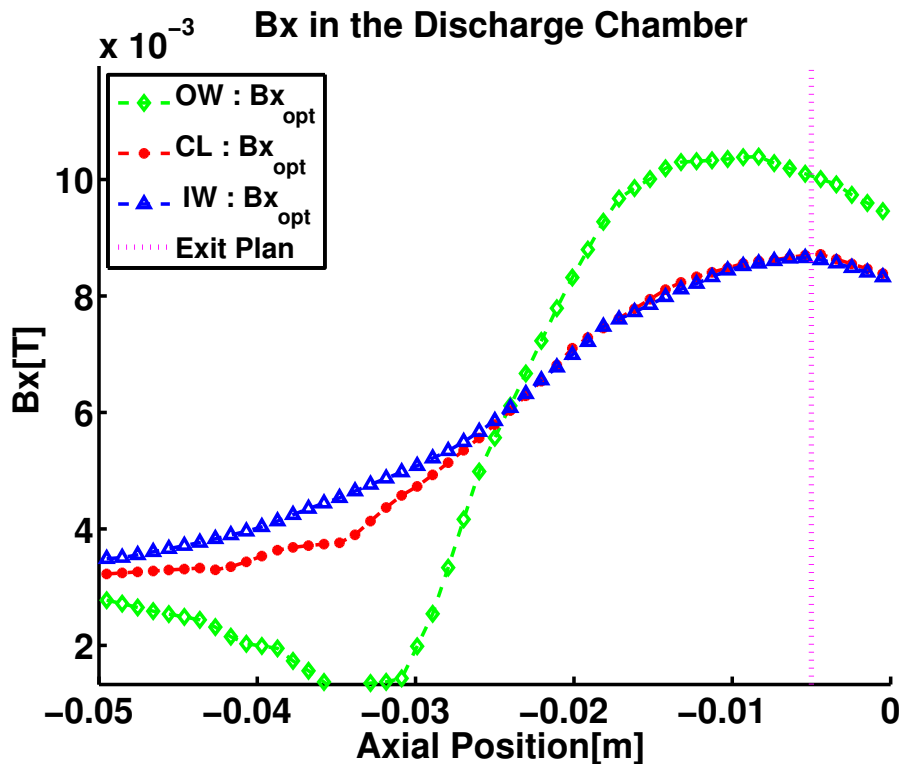


FIGURE 5.8 – Le profil du champ à l'intérieur du moteur au niveau des deux parois murale et centrale du canal plasma : (a) le profil de la composante radiale du champ magnétique  $\mathbf{B}$  ; (b) le profil de la composante axiale du champ magnétique  $\mathbf{B}$  (pour  $T_1$ ).

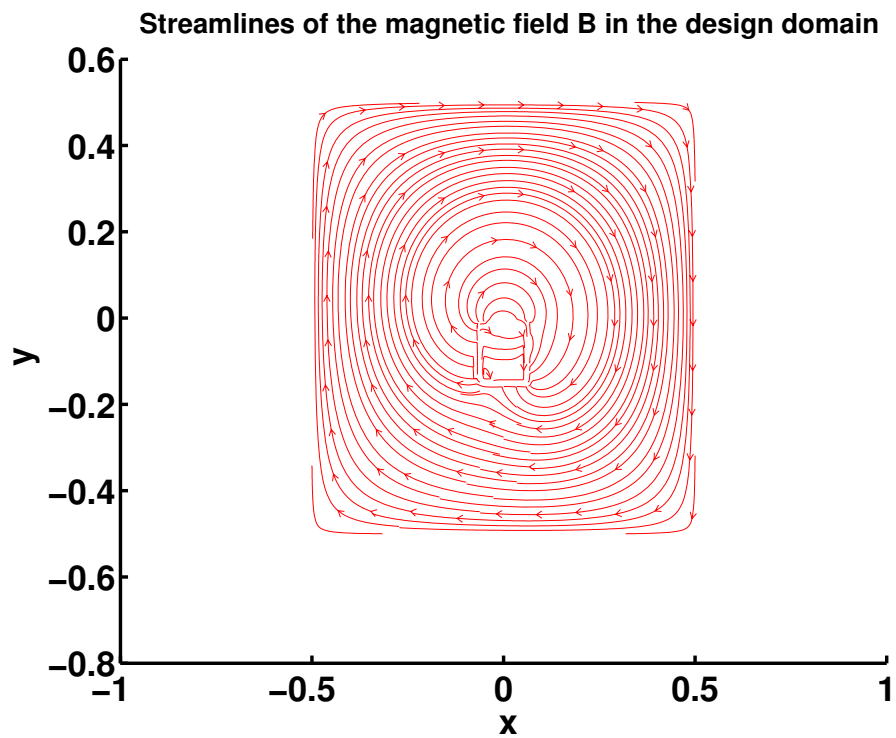
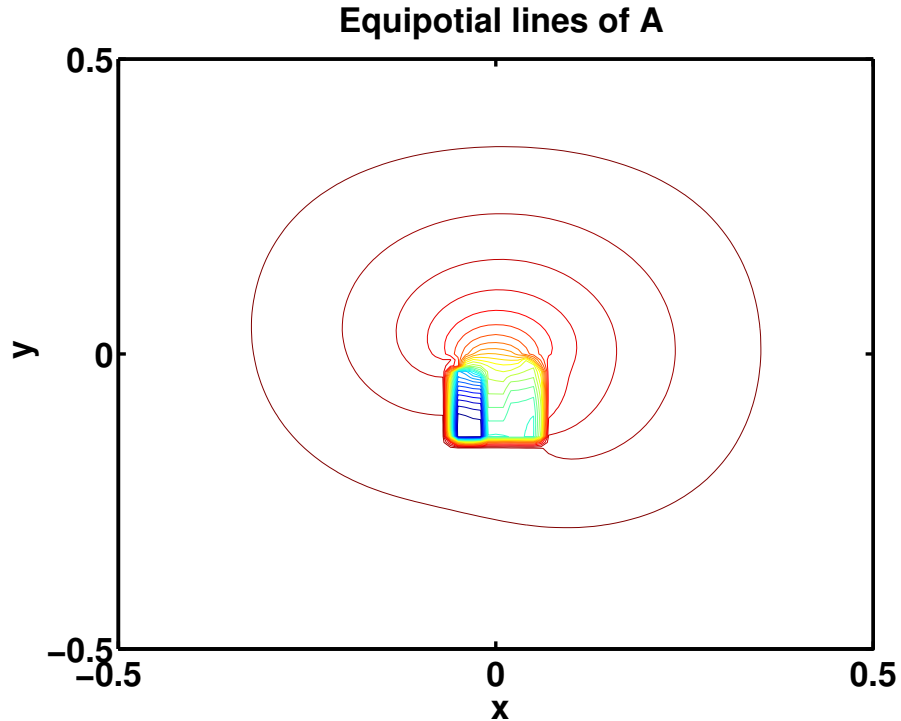
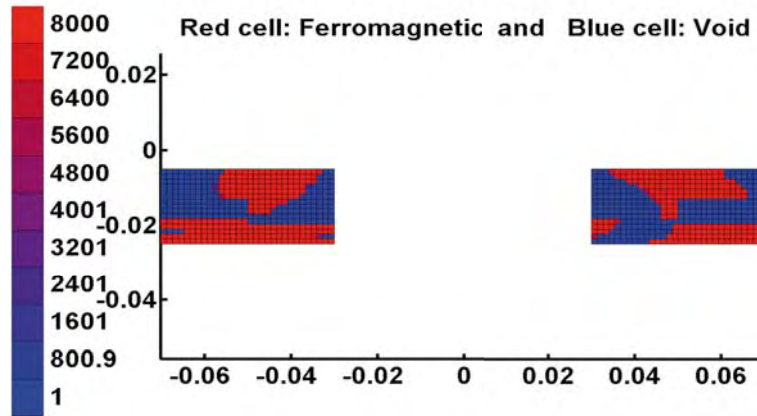
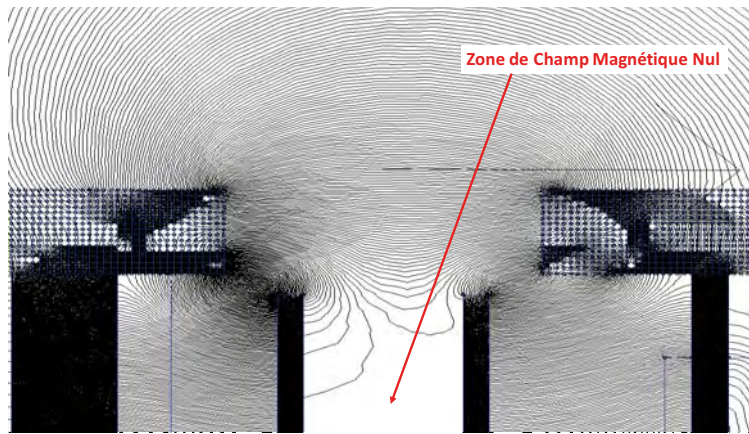
(a) La circulation du champ  $B$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$ .(b) Les lignes équipotentielle du vecteur potentiel  $A$  dans le domaine  $\Omega$ .

FIGURE 5.9 – Analyse graphique de la distribution spatiale du champ magnétique  $B$  et du vecteur potentiel  $A$  à l'intérieur du domaine de conception du circuit (pour T1).





(a) Topologie Optimale



(b) Distribution du flux magnétique

FIGURE 5.10 – Solution topologique optimale pour **T2** :  $\text{Nb}_{\text{Iter}} = 0$ ,  $W(\rho^0) = 2,38$  et  $\text{Nb}_{\text{Iter}} = 138$ ;  $W(\rho^{\text{opt}}) = 0,99$ .

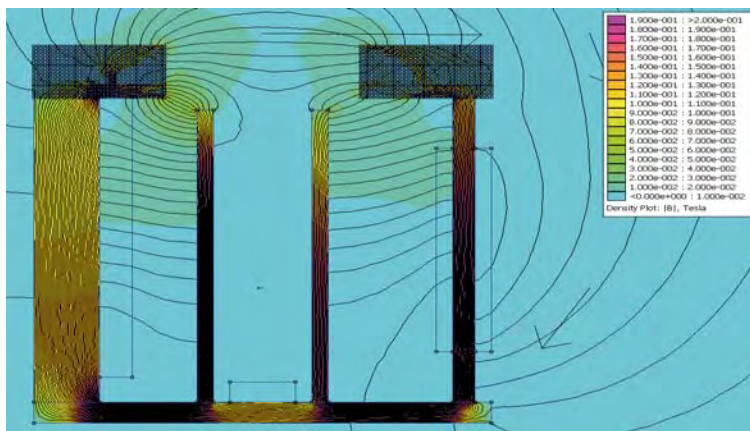
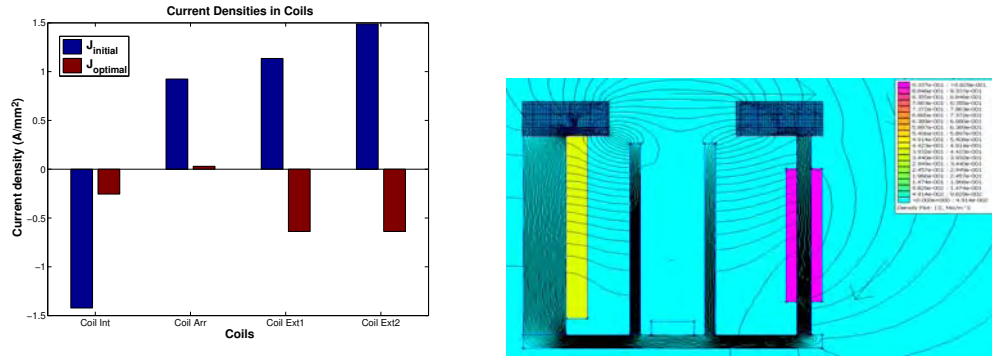
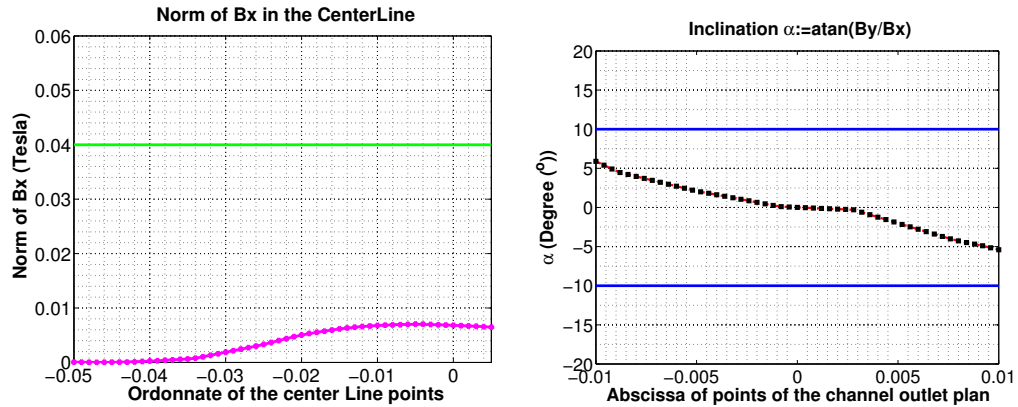


FIGURE 5.11 – Distribution de l'intensité du module du flux magnétique dans le domaine de conception  $\Omega$  pour **T2**.



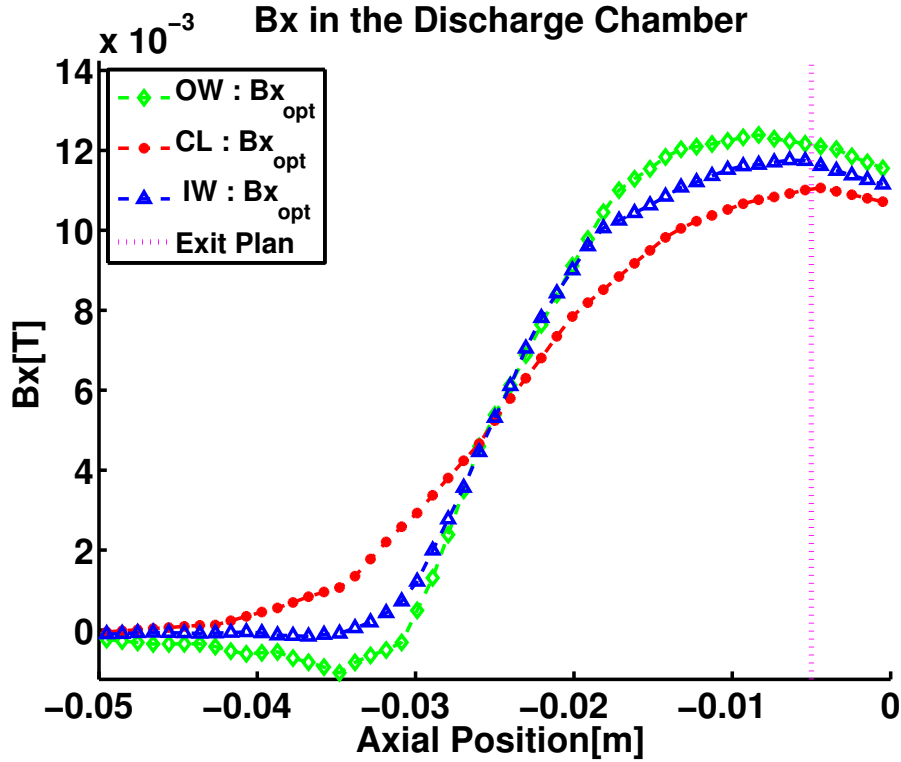
(a) Les Densités de Courant initiales ( $J_{initial}$ ) et optimales ( $J_{optimal}$ ). (b) Distribution spatiale des densités de courant optimale dans le domaine de conception.

FIGURE 5.12 – Densités de courant optimales pour **T2**.

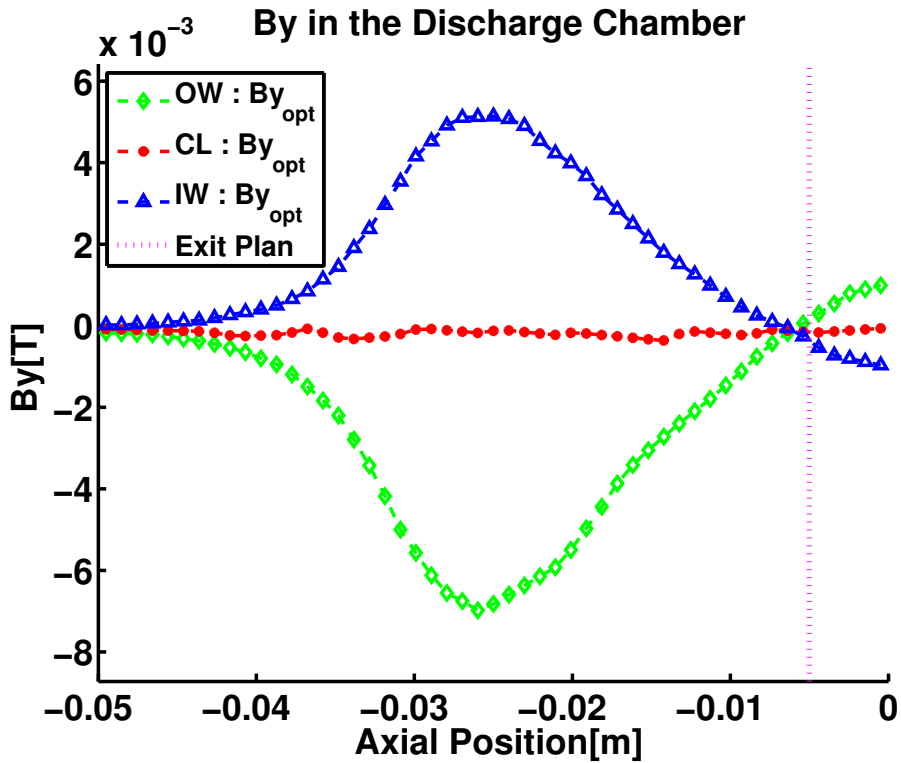


(a) Module de la composante radiale du champ  $\mathbf{B}$  au centre du canal plasma. (b) L'inclinaison de lentille au niveau du plan de sortie.

FIGURE 5.13 – Contraintes imposées sur la topologie de la cartographie magnétique produite par le circuit optimal (pour **T2**).



(a)



(b)

FIGURE 5.14 – Le profil du champ à l'intérieur du moteur au niveau des deux parois murale et centrale du canal plasma : (a) le profil de la composante radiale du champ magnétique  $\mathbf{B}$  ; (b) le profil de la composante axiale du champ magnétique  $\mathbf{B}$  (pour T2).



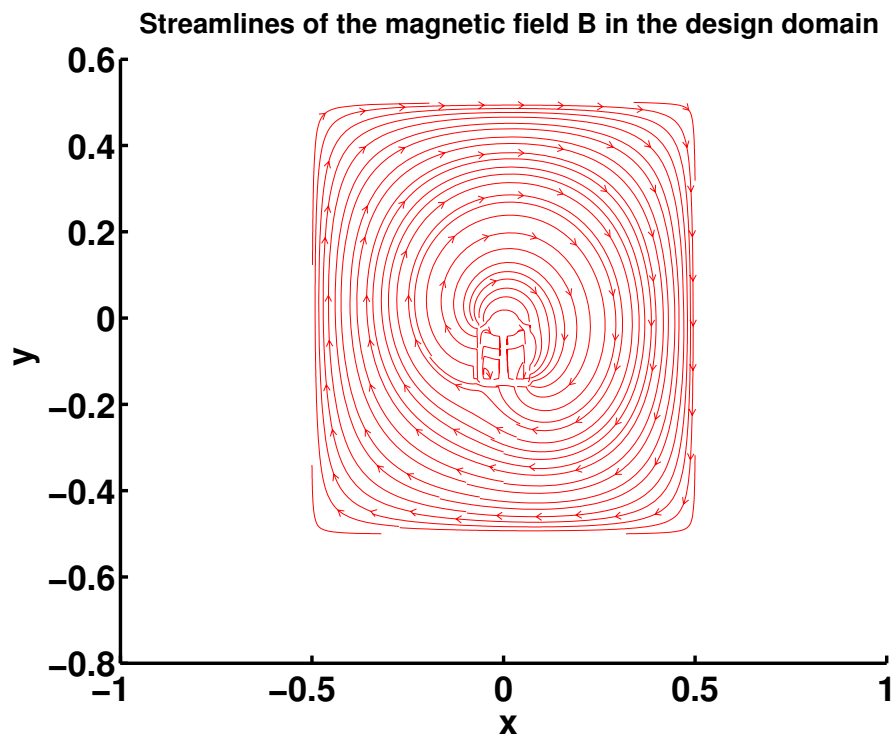
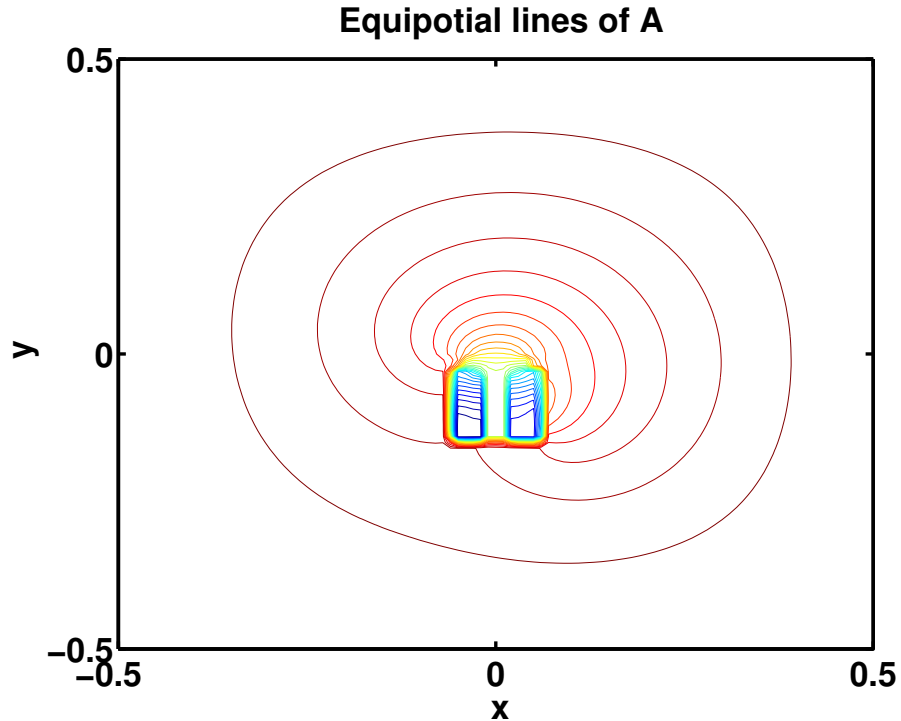
(a) La circulation du champ  $\mathbf{B}$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$ .(b) Les lignes équipotentiellles du vecteur potentiel  $A$  dans le domaine  $\Omega$ .

FIGURE 5.15 – Analyse graphique de la distribution spatiale du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et du vecteur potentiel  $A$  à l'intérieur du domaine de conception du circuit (pour T2).

noter que le champ magnétique optimal (c'est-à-dire celui produit par le circuit magnétique optimal trouvé) est majoritairement radial car sa composante axiale est quasi-nulle comme le montre la Figure 5.14(b). De plus, au niveau de la sortie du canal d'ionisation, l'angle d'inclinaison est pratiquement nul sur une grande partie du plan de sortie, notamment au centre de ce plan, voir la Figure 5.13(b) : c'est ce type de topologie magnétique qui est requis en général pour les moteurs plasmiques.

Les circulations du champ magnétique dans le domaine de conception  $\Omega$ , présenté sur les résultats numériques des Figures 5.9(a) et 5.15(a) servent à la détermination du sens de la vitesse de dérive  $\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$  dans la modélisation des plasmas pour la propulsion des PEHs (voir plus de détails dans la section 1.5.1.3 du Chapitre 1).

En ce qui concerne l'usage des deux circuits à topologie magnétique obtenus, le circuit de **T1** est réalisable en pratique sans altération de la qualité de la solution trouvée avec le processus de conception optimale de ATOP<sup>T0</sup>. En effet, toutes les parties ferromagnétiques sont connectées les unes aux autres, voir la Figure 5.4(a) et une illustration 3D du circuit électromagnétique complet est donnée en Figure 5.16. Par contre, l'étape de réalisation du circuit magnétique obtenu dans le cas test **T2** nécessite des jonctions supplémentaires qui relieront les différents blocs séparés de matériau (sur le design à topologie optimale de la Figure 5.10(a)). Le bon compromis est de chercher la manière de connecter ses blocs de fer de la solution optimale 5.10(a). Pour cela, il est possible de procéder selon l'une des 3 façons suivantes du plus simple au plus complexe :

1. Joindre ces blocs ferromagnétiques avec la même matière que ceux des blocs (obtenus avec l'optimisation) en suivant le flux du champ magnétique (typiquement comme celui de la Figure 5.4(b)). Cette manière de procéder peut détériorer la qualité de la solution optimale de **T2**. En effet, le volume de matériau  $V_0$  imposé ne sera plus respecté, de plus en augmentant le volume de fer dans les zones de pièces polaires cela pourrait accroître l'intensité maximal du champ magnétique au centre du canal plasma (conformément à l'hypothèse 1 du chapitre 4 pour l'application de la méthode de B&B pour l'optimisation topologique des circuits magnétiques pour PEH). Une illustration est donnée sur la Figure 5.17(a).
2. Joindre ces blocs ferromagnétiques avec une autre matière notamment du diélectrique. Ce nouveau matériau qui servira de jointure, peut-être choisi de telle sorte que le circuit magnétique résultant soit moins encombrant et plus léger (en procédant de manière analogue au cas 1). Dans ce cas, aussi la forme des joints doit suivre le flux du champ produit par le circuit (comme décrit précédemment). Une illustration 3D du dispositif optimal trouvé est faite sur la Figure 5.17(b).
3. Joindre ces blocs ferromagnétiques avec des frontières libres qui seront assujettis à une optimisation de forme pour obtenir la jointure optimale. Néanmoins, ce dernier procédé qui est plutôt rationnel, constitue l'une des perspectives de cette thèse. Dans ce cas, il sera alors possible de développer une

approche complète en commençant avec l'optimisation topologique et en poursuivant avec de l'optimisation de forme sur une grande partie des frontière en « dents de scie » (en particulier dans le résultat numérique 5.10(a)), et ce afin d'avoir des pièces polaires aux contours à la fois lisses et optimaux. Une illustration est donnée sur la Figure 5.18.

A travers les différents tests numériques, on remarque que cette séparation des blocs est l'une des difficultés bien connue en optimisation topologique sous le nom de « problème de damier », survient lorsque le volume total du domaine de conception à topologie variable ( $\Omega_m$ ) est très grand devant le volume limite imposé  $v_0$ . Lorsque le volume total est élevé devant  $v_0$ , non seulement cela peut induire beaucoup de densités intermédiaires dans la solution optimale mais cela provoque aussi la dispersion des blocs de matériau dans le domaine de conception (il faut aussi noter que le design optimal à blocs séparés correspondant au test **T2** a un volume limite fixé à 40% du volume total contre 60% pour le cas test **T1**). Les dispositifs des Figures 5.16 et 5.17 montrent le passage des modèles réduits 2D à la réalisation physique 3D des circuit électromagnétiques optimaux trouvés.

Cas test	NbIter	$W^0 \rightarrow W^{\text{opt}}$	$J_1^{\text{opt}}$	$J_2^{\text{opt}}$	$J_3^{\text{opt}}$	$J_4^{\text{opt}}$
<b>T1</b> : $v_0 = 60\%$	110	$35.5 \rightarrow 0.48$	-0.21	-0.29	-0.25	-0.25
<b>T2</b> : $v_0 = 40\%$	138	$2.38 \rightarrow 0.99$	-0.25	+0.035	-0.61	-0.61

TABLE 5.1 – Les résultats numériques avec **ATOP**<sup>T0</sup> du problème de conception des pièces polaires interne et externe, pour une consommation minimale de puissance électrique. Les temps CPU sont de 130 min pour **T1** et 290 min pour **T2**.

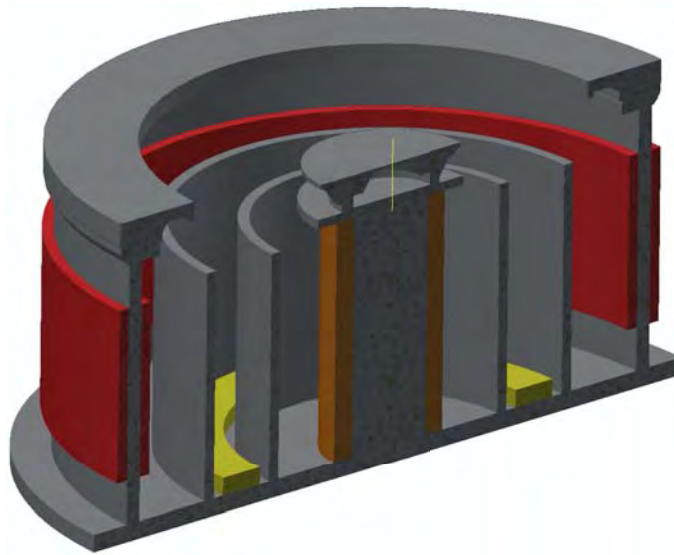
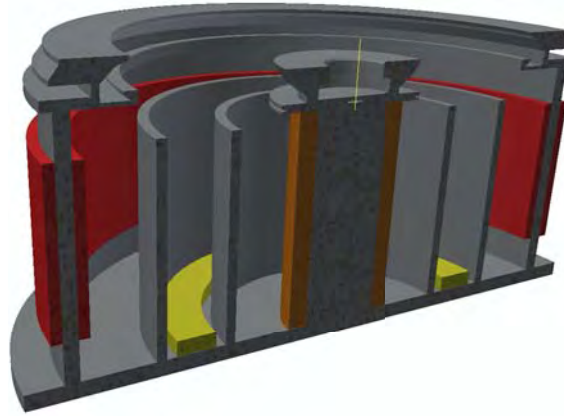
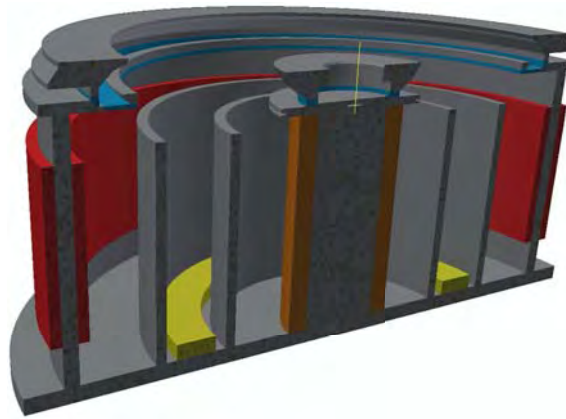


FIGURE 5.16 – Principe de jointure des blocs séparés du circuit optimal du cas test **T2** par optimisation de forme.



(a)



(b)

FIGURE 5.17 – Réalisation pratique du design optimal du cas test **T2** : (a) Circuit magnétique optimal à jointure ferromagnétique ; (b) Circuit magnétique optimal à jointure en matériau diélectrique léger (en bleu). Dans ces dispositifs : -la couleur grise désigne le circuit magnétique ; -la couleur rouge désigne des zones de bobines externes  $\Omega_{s3}$  et  $\Omega_{s4}$  de valeur optimale de densité de courant  $-0.61$  ; -la couleur marron désigné la zone de la bobine centrale  $\Omega_{s1}$  de valeur optimale de densité courant  $-0.25$  ; - la couleur jaune désigne la zone de la bobine arrière  $\Omega_{s2}$  de valeur optimale  $0.035$ , voir le Tableau 5.3.2.

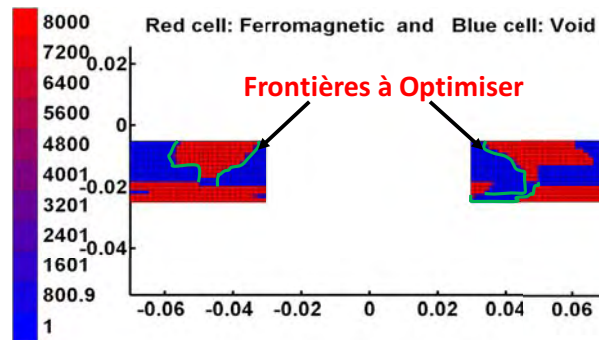


FIGURE 5.18 – Principe de jointure des blocs séparés du circuit optimal du cas test **T2** par optimisation de forme.

**Remarque 5.2** *Les Figures 5.17 et 5.18 sont des schémas illustrant le dispositif 3D problème étudié ( $\mathfrak{P}$ ) dont le domaine de conception considéré est présenté sur la Figure 5.1. Ses figures ont été réalisées en utilisant le principe de réduction montré dans la Section 2.5.1 du Chapitre 1 avec les résultats topologique optimal obtnue (dans un repère cartésien 2D), voir aussi la Figure 2.6 (pour le processus inverse c'est-à-dire passage d'une géométrie 3D à une section plane à optimiser).*

## 5.4 Conclusion

Pour résoudre le problème de consommation de puissance électrique des propulseurs électriques, il est intéressant de considérer le problème inverse de conception de circuits magnétiques en minimisant la densité de courant traversant les section planes des bobines. En considérant ce nouveau critère, un nouveau modèle d'optimisation topologique pour le design associé a été proposé. C'est un problème d'optimisation mixte (car les densités de courant sont des variables continues et les matériaux sont des variables discrètes). Par la suite, l'analyse de sensibilité a conduit à résolution d'un problème auto-adjoint dont le processus d'optimisation numérique est moins gourmand en terme de la consommation du temps-cpu, cela permet aussi de induire de l'efficacité et de la robustesse du code `ATOPT0`. Cela a constitué une extension des applications possibles de notre approche d'optimisation topologique, que l'on a appelé M-SIMP.

Cette approche M-SIMP a été validée à travers des exemples d'application pratique pour la configuration géométrique des pièces polaires d'un PEH. Avec différents ratios de volumes limites de matériau et l'addition de nouvelles contraintes, des solutions distinctes ont été obtenues. En particulier pour un faible ratio de volume de matériau imposé, le circuit optimal trouvé est fait de blocs de circuits déconnectés les uns des autres dont il faudra trouver un procédé adéquat pour les joindre. Dans ce chapitre, nous avons proposé 3 manières pour la manufacture concrète de tels circuits magnétiques dissociés.



# Conclusion

Dans ces travaux de thèse, nous avons présenté les principales technologies de propulsion spatiale qui sont la propulsion chimique et la propulsion électrique. Ensuite, nous avons montré et expliqué notre intérêt pour les propulseurs électriques, en particulier les moteurs à effet Hall. Bien que moins coûteux en énergie consommée pour les missions spatiales lointaines où la durée du voyage n'est pas une contrainte majeure, la configuration topologique du circuit magnétique de ces engins à propulsion plasmique reste très complexe à réaliser. C'est ce qui explique le rattachement des ingénieurs aux premiers circuits proposés par les pionniers dans le domaine du design des véhicules spatiaux. Cependant, ces anciens modèles de circuits magnétiques dédiés aux propulseurs plasmiques conçus empiriquement sont le plus souvent pénalisés par leur masse et ils sont aussi plus encombrant. Ainsi, nous avons proposé des modèles et méthodes mathématiques afin de résoudre ces problèmes de configuration magnétique des propulseurs électriques avec rigueur et rationalité. Les modèles résultants sont des problèmes d'optimisation très difficiles à résoudre. En effet, ce sont des problèmes inverses d'électromagnétisme qui sont mal-posés.

Suite à la mise en place de ces modèles théoriques, nous avons développé des programmes mathématiques servant d'outils théoriques et numériques pour le design optimal et automatique des circuits magnétiques respectant une topographie de champ magnétique imposée. Nos codes d'optimisation topologique sont dénommés **ATOP** (Algorithm To Optimize Propulsion). Ils sont principalement basés sur l'approche de distribution optimale de densité de matière (SIMP) couplé avec des algorithmes d'optimisation locale d'une part. Afin, d'avoir des solutions usinables, nous avons renforcé l'efficacité et la robustesse de **ATOP<sup>T0</sup>** avec des Schémas d'Interpolation de Matériaux polynomiaux généralisés. De plus, dans nos études pour réduire les influences du point départ dans le module d'optimisation, nous avons proposé un programme hybride **ATOP<sup>BBA→T0</sup>** utilisant une méthode d'optimisation globale déterministe de type B&B (Branch and Bound) avec un code de calcul par intervalles suivi d'une résolution avec **ATOP<sup>T0</sup>** (d'autre part).

Les résultats obtenus au cours des différentes simulations numériques ont été satisfaisant ceux ci ont permis de valider nos approches en montrant l'efficacité et la robustesse de nos techniques d'optimisation pour la conception des circuits magnétiques pour les PEHs. En plus de rendre facile et automatique le processus de conception des propulseurs électriques, avec le code **ATOP**, le gain en terme de la masse peut-être estimé entre 30% et 60% (selon le nombre des noyaux ma-

gnétiques du circuit soumis à l'optimisation topologique). Avec de tels outils, des configurations magnétiques pouvant limiter le phénomène d'érosion (qui est l'une des principales causes de mise hors service des propulseurs électriques) pourront voir le jour. En effet, les recherches ont permis de prouver qu'un choix judicieux de la cartographie est une solution préventive contre l'érosion (par exemple le Magnetic Shielding). Il suffit alors d'imposer de telles distributions de champ magnétique (et ou avec un angle d'inclinaison des lentilles magnétiques particulier permettant de protéger les pièces polaires qui sont les plus exposées au bombardement des particules plasmiques fortement énergétiques) pour retrouver le circuit magnétique capable de produire ces distributions de champ.

Dans cette thèse, on s'est principalement focalisé sur les méthodes d'optimisation topologique car elles sont beaucoup plus générales dans le sens où elles permettent d'avoir des designs topologiques optimaux inattendus d'une part. Cependant, elles permettent aussi d'avoir des solutions optimales qui n'aurait pu être obtenues soit en utilisant l'optimisation paramétrique ou l'optimisation forme (uniquement). Néanmoins, une suite logique à ces résultats d'optimisation topologiques est l'application de méthodes d'optimisation de forme classique (basée sur les variations de frontière) à partir des solutions topologiques obtenues, et ce afin de raffiner rigoureusement les contours des circuits optimaux à réaliser (comme expliquer au Chapitre 5). Ainsi, en plus de la technique d'hybridation avec un algorithme B&B (qui a donné naissance au développement du code  $\text{ATOP}^{\text{BBA} \rightarrow \text{T0}}$ , cf Chapitre 4), cela pourrait aussi être une extension du code  $\text{ATOP}^{\text{T0}}$  (qu'on appellera  $\text{ATOP}^{\text{T0} \rightarrow \text{S0}}$ ).

Dans ces approches utilisant des SIMs généraux pour le modèle SIMP (présentés au Chapitre 3), il pourrait-être intéressant d'implémenter les suites récurrentes du seconde ordre. Ces résultats pourraient être comparés à ceux déjà obtenus en utilisant les SIMs du premier ordre par rapport aux deux critères d'analyse de la qualité de la solution optimale : avoir une bonne convergence en terme de la valeur minimum du critère et moins de points intermédiaires dans le design optimal de la solution continue (cf Chapitre 3).

Au cours des précédentes analyses, nous avons procédé par séparation des problèmes de conception afin de les résoudre efficacement : a savoir un modèle de type moindres carrés avec un critère  $F$  et un modèle basé sur la minimisation de l'énergie magnétique  $W$ . Un modèle étendu peut être obtenu en couplant ces deux problèmes mono-critère ( $\wp$ ) et ( $\mathfrak{P}$ ). En plus, ce modèle pourrait être intéressant pour nos applications, en incluant des termes prenant en compte des paramètres plasmiques et ou de poussée. Dans ce cas, une formulation du problème peut-être donnée comme suit : 
$$\min_{\mathbf{p} \in \Omega_{\text{circuit}} \cap \Omega_{\text{plasma}}} \beta_1 F(\mathbf{p}) + \beta_2 W(\mathbf{p}) + \beta_3 \Psi(u, \xi).$$
 Dans ce problème, les coefficients  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$  sont des quantités positives (en général ils sont pris de sorte que le critère ci-dessus soit une combinaison convexe). Les deux premiers termes correspondent aux fonctions objectifs  $F$  et  $W$  des deux problèmes ( $\wp$ ) et ( $\mathfrak{P}$ ) respectivement. Le troisième critère  $\Psi$  est associé à la modélisation du plasma et de la poussée produite par le propulseur électrique. Avec  $u$  la vitesse moyenne des particules ioniques et  $\xi$  la densité du plasma. Ces deux paramètres



caractéristiques d'un plasma sont liés par une équation d'évolution donnée par  $\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi u) = 0$ . Par ailleurs, la vitesse  $u$  est liée au champ électromagnétique par des quantités physiques telles que la force de Lorentz  $F_L$  (voir notamment le chapitre 1), et par la vitesse de dérives (cf chapitre 1). Cette nouvelle formulation fera intervenir, d'autres paramètres (notamment à travers l'utilisation du champ électrique  $E$ ), tel que la température  $T$  du plasma (qui est un paramètre très important pour le choix des matériaux pour le design) et le potentiel électrostatique  $\phi$ . En particulier, pour simplifier le problème, on pourra définir la densité du plasma par une distribution de Boltzmann  $\xi = \xi_0 \exp\left(\frac{e\phi}{T}\right)$ , avec  $e$  la charge élémentaire électronique.

Dans ce problème, l'ensemble admissible est donné par  $\Omega_{\text{circuit}} \cap \Omega_{\text{plasma}}$ , avec  $\Omega_{\text{circuit}}$  l'ensemble définissant les contraintes habituelles telles que les bornes sur le paramètre de conception du circuit  $\mathbf{p}$ , le volume limite  $V_0$ , les contraintes sur la topographie du champ magnétique  $\mathbf{B}$  (typiquement comme en  $(\mathfrak{P})$ ).  $\Omega_{\text{plasma}}$  est dédié ici au type de plasma. Cet ensemble  $\Omega_{\text{plasma}}$  peut contenir des contraintes telles que la condition d'équilibre du plasma, la stabilité du plasma (que l'on mesure le plus souvent à travers le produit scalaire :  $u \cdot \nabla \xi$ ), une valeur limite  $T_0$  sur la température à l'intérieur de la décharge plasmique, la pression  $P$ , etc.

Par sa définition le problème complet d'optimisation hérite des mêmes difficultés que les premiers modèles d'optimisation  $(\wp)$  et  $(\mathfrak{P})$  (notamment il est mal-posé). Ici, j'ai privilégié une formulation mono-objectif, néanmoins des techniques d'optimisation multi-objectifs peuvent s'appliquer pour le résoudre. Une deuxième étape pourra être aussi l'emploi d'approches d'optimisation stochastique car la densité du plasma est fonction du *taux d'ionisation* du gaz propulsif qui suit une loi de probabilité.

Cependant, l'aboutissement de la résolution de problème incluant la modélisation du plasma nécessite des collaborations supplémentaires entre Plasmiciens, Electromagnéticiens et Mathématiciens.

Au cours de ces travaux de recherches, les défis étaient nombreux à cause notamment du caractère pluridisciplinaire de cette étude (les théories mathématiques, d'électromagnétisme, de la modélisation, optimisation mathématique, etc). Malgré tout, nous sommes parvenus à proposer des solutions qui ont abouti à la mise en place de modèles mathématiques précis et de programmes numériques dédiés au design optimal de circuits magnétiques de propulseurs plasmiques. Ainsi, notre algorithme ATOP pourra servir pour déterminer des configurations de la topologie magnétique des nouvelles générations de propulseurs plasmiques à effet Hall, avec plus de simplicité, de rationalité et d'efficacité.



# Bibliographie

- [1] M. J. L. Turner, *Rocket and Spacecraft Propulsion, Principles, Practice and New Developments*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Edition Number 3, 2009.
- [2] R. Vilamot, *Optimisation de la configuration magnétique d'un propulseur à effet Hall par résolution du problème inverse*, thèse de doctorat, Département Génie Electrique, INP-ENSEEIH-LAPLACE, Université de Toulouse, France, Janvier 2012.
- [3] A. Cadiou, *La propulsion des Véhicules spatiaux*, Nouvelles Méthodes de propulsion dans le spatial, Repères, REE, No 8, pp. 66-70, Septembre 2000.
- [4] R. G. Jahn, *Physics of Electric Propulsion*, Serie in Missile and Space Technology , McGraw-Hill Book Company, New York, 1968 edition.
- [5] J. Fisher, A. Wilson, D. King, S. Meyer, K. de Grys, *The development and qualification of 4.5 KW Hall Thruster propulsion system for GEO satellite applications-Status Update*, 28<sup>th</sup> IEPC, pap-295, March 2003, Toulouse, France.
- [6] A. Mathers and K. de Grys, *Performance Variation in BPT-4000 Hall Thrusters*, 31<sup>st</sup> IEPC, pap-144, September 2009, Michigan, USA.
- [7] Technologies de propulsion, propulsion électrique, [www.je-comprends-enfin.fr](http://www.je-comprends-enfin.fr).
- [8] G. Lecompte-Boinet, *La mise en orbite des satellites électriques*, Industrie & Technologies, Veille technologique pour les professionnels de l'industrie, publié le 01/06/2014.
- [9] A. V. Cleaver, *A Programme for Achieving Interplanetary Flight*, Journal of the British Interplanetary Society (JBIS), vol. 13, pp. 1-27, 1954.
- [10] D. G. Shepherd, *Aerospace Propulsion*, Elsevier Science Ltd (July 1972).
- [11] E. Stuhlinger, *Design and Performance Data of Space Ships with Ionic Propulsion Systems*, VIII<sup>th</sup> International Astronautical Congress Barcelona 1957, pp. 403-412, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1958.
- [12] E. Stuhlinger, *Progress in Electric Propulsion Systems*, XI<sup>th</sup> International Astronautical Congress Stockholm 1960, Proceedings Vol. I, Main Sessions, pp. 651-670, Springer-Verlag Vienna, 1961.
- [13] E. Stuhlinger, *Electric space propulsion systems*, Space Science Reviews, Vol. 7, Issue 5-6, pp. 795-847, Kluwer Academic Publishers, December 1967.
- [14] E. Stuhlinger, *Enabling technology for space transportation*, The Century of Space Science, pp. 59-114, Springer Science+Business Media B.V., 2001.

- [15] C. Boniface, *Modélisation et diagnostic d'un propulseur à effet Hall pour satellites : configuration magnétique et nouveaux concepts*, thèse de doctorat, Spécialité : Physique et ingénierie des plasmas de décharge, Département : Physique, Chimie, Automatique, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Février 2006.
- [16] V. Kim et al., *Electric Propulsion Activity in Russia*, 27<sup>th</sup> IEPC, pap-5, October 2001, Pasadena, Californie, USA.
- [17] A. I. Morozov, *The Conceptual Development of Stationary Plasma Thrusters*, Plasma Physics Report, Vol. 29, No. 3, 2003, pp. 235-250. Translate from Fizika Plazmy, Vol. 29, No. 3, pp. 261-276.
- [18] V. Murashko et al., *State of the Art and Prospects of Electric Propulsion in Russia*, 28<sup>th</sup> IEPC, pap-340, March 2003, Toulouse, France.
- [19] V. Kim et al., *Alexey Morozov-Leader of the SPT development in the USSR*, 31<sup>st</sup> IEPC, pap.-98, September 2009, Michigan, USA.
- [20] D.M. Goebel and I. Katz, *Fundamentals of Electric Propulsion*, John Wiley Sons, Inc., 2008.
- [21] D. Estublier, G. Saccoccia and J. G. del Amo, *Electric Propulsion on SMART - 1*, A Technology Milestone, Propulsion and Aerothermodynamics Division, Directorate of Technical and Quality Management, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands.
- [22] A. Bouchoule, O. Duchemin, M. Dudeck, S. Mazouffre, *La propulsion électrique pour les missions spatiales*, Association Aéronautique et Astronautique de France (3AF), Dossier de Science, No. 6, pp. 11-16, Juin 2007.
- [23] L. Garrigues, *Modélisation d'un Propulseur à Plasma Stationnaire*, thèse de doctorat, Centre de Physique des Plasmas et de leurs Applications, Discipline : physique des plasmas de décharge, Université Paul Sabatier de Toulouse, France, Octobre 1998.
- [24] G. Bourgeois, *Influence de la topologie magnétique, de la cathode et de la section du canal sur l'accélération des ions dans un propulseur à effet Hall*, thèse de doctorat, école doctorale science et technologies, discipline : physique des plasmas, Université d'Orléans, France, Septembre 2012.
- [25] J. A. Linnell and A. D. Gallimore, *Internal plasma potential measurements of a Hall thruster using xenon and krypton propellant*, Phys. Plasmas 13, 093502 (2006), American Institute of Physics.
- [26] A. I. Bugrova et al., *Experimental Investigations of a Krypton Stationary Plasma Thruster*, Hindawi Publishing Corporation International Journal of Aerospace Engineering, Volume 2013, Article ID 686132, 7 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/686132>.
- [27] J. P. -Luna, G. J. M. Hagelaar, L. Garrigues, and J. P. Boeuf, *Model analysis of a double-stage Hall effect thruster with double-peaked magnetic field and intermediate electrode*, Physics of Plasmas 14, 113502 (2007); doi : 10.1063/1.2783989.
- [28] L. Garrigues, C. Boniface, G. J. Hagelaar, and J. P. Boeuf, *Modeling of an advanced concept of a double stage Hall effect thruster*, Phys. Plasmas 15, 113502 (2008); doi : 10.1063/1.3013541.

- [29] J. P. -Luna, *Modélisation et diagnostics d'un propulseur à effet Hall*, thèse de doctorat, spécialité : Physique et ingénierie des plasmas de décharge, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Novembre 2008.
- [30] A. Luc, *Etudes expérimentales d'un propulseur à effet Hall - Comportement stationnaire et dynamique du flux d'électrons*, thèse de doctorat, discipline : Physique des Plasmas, Université d'Orleans, France, Décembre 2004.
- [31] K. Nishiyama *et al.*, *HAYABUSA's Way Back to Earth by Microwave Discharge Ion Engines*, 46<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 25-28 July, Nashville, TN, USA, AIAA 2010-6862.
- [32] *Cathode Life Test Facility Annual Report*, Naval Surface Warfare Center, Crane Division, Heat Wave Labs, Inc., Period Covered, February 2001-March 2002, USA.
- [33] L. Garrigues, *Modélisation des Plasma Hors-Equilibre Application à la Propulsion*, Habilitation à Diriger des Recherches (HDR), Laboratoire PLASMA et Conversion d'Energie (LAPLACE), Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Juillet 2009.
- [34] M. Day, V. Kim, V. Kozlov, A. Lazurenko, G. Popov, et A. Skrylnikov, *Investigation of the possibility to reduce SPT plume divergence by optimization of the magnetic field topology in the accelerating channel*, 25<sup>th</sup> IEPC, pap.-154, October 1997, Cleveland, Ohio, USA.
- [35] L. Garrigues, G. J. M. Hagelaar, J. Bareilles, C. Boniface, et J. P. Boeuf, *Model study of the influence of the magnetic field configuration on the performance and lifetime of a Hall thruster*, Physics of Plasmas 10, 4886 (2003) ; doi : 10.1063/1.1622670.
- [36] D. Gawron, S. Mazouffre, N. Sadeghi, et A. Héron, *Influence of magnetic field and discharge voltage on the acceleration layer features in a Hall effect thruster*, Plasma Sources Sci. Technol. 17 (2008) 025001 (10pp), doi :10.1088/0963-0252/17/2/025001.
- [37] G. A. Shagayda, et S. Irishkov, *The Influence of the Magnetic Field Topology on Hall Thruster Performance*, 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, (doi : 10.2514/6.2006-4472).
- [38] R. R. Hofer et A. D. Gallimore, *The Role of Magnetic Field Topography in Improving the Performance of High-Voltage Hall Thrusters*, 38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 7-10 July 2002, Indianapolis, Indiana (AIAA 2002-4111).
- [39] I. G. Mikellides, I. Katz, R. R. Hofer, and D. M. Goebel, *Magnetic Shielding of Walls from the Unmagnetized Ion Beam in a Hall Thruster*, Applied Physics Letters 102, 2, 023509 (2013).
- [40] R. R. Hofer, B. A. Jorns, J. E. Polk, I. G. Mikellides, and J. S. Snyder, *Wear test of a magnetically shielded Hall thruster at 3000 seconds specific impulse*, 33<sup>rd</sup> IEPC, pap.-33, October 2013, The George Washington University, Washington, USA.

- [41] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton Landmarks in Mathematics and Physics, 1963.
- [42] V. Chvatal, *Linear Programming*, Series of Books in the Mathematical Sciences, First Edition 1981.
- [43] D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific Series in Optimization and Neural Computation, vol. 6, Third printing Edition,
- [44] J. B. Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe, Exercices Corrigés, avec rappels de cours*, Collection Enseignement Sup //// Mathématiques L3M1, EDP Sciences, 2009.
- [45] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms, vol I and vol II : Advanced theory and bundle methods*, vol. 306 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1993.
- [46] M. Bücker, G. Corliss, P. Hovland, U. Naumann, B. Norris, *Automatic Differentiation : Applications, Theory, and Implementations*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol. 50, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006.
- [47] A. R. Conn, K. Scheinberg, L. N. Vicente, *Introduction to Free-Derivative Optimization*, MPS-SIAM Series on Optimization, 2009 by the Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Programming Society.
- [48] J. Nocedal, and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer Series in Operation Research and Financial Engineering, Springer, 2006.
- [49] F. Messine, *L'Optimisation Globale par Intervalles : de l'Etude Théorique aux Applications*, Habilitation à Diriger les Recherches, ENSEEIHT, Université de Toulouse, France, Février 2006.
- [50] J. Ninin, *Optimisation Globale basée sur l'Analyse d'Intervalles : Relaxation Affine et Limitation de Mémoire*, Thèse de Doctorat, Spécialité : Informatique, INP-ENSEEIH Université de Toulouse, France, Décembre 2010.
- [51] M. P. Bendsøe, and O. Sigmund, *Topology Optimization Theory, Methods and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.
- [52] M. P. Bendsøe, and O. Sigmund, *Material interpolation schemes in topology optimization*, Archive of Applied Mechanics 69, 1999, pp 635-654, Springer-Verlag.
- [53] G.I.N. Rozvany, *Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics*, Struct. Multidisc. Optim. vol. 21, pp. 90-108, Springer-Verlag, 2001.
- [54] P. Duysinx, *Optimisation Topologique : du Milieu Continu à la structure Elastique*, thèse, Ingénieur Civil Electricien-Mécanicien (Aérospatiale), Université de Liège Faculté des Sciences Appliquées, Belgique, 1995-1996.
- [55] J. Droniuo, *Quelques Résultats sur les Espaces de Sobolev.*, Université de Provence, Marseilles, France, 29 Avril 2001.

- [56] M. Tucsnak, *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*, Note de Cours, Nancy Université/CNRS/INRIA, France, May 7, 2012.
- [57] R. Adam, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- [58] C. Zuily, *Distributions et équations aux dérivées partielles : exercices corrigés*, Méthodes, Hermann, 1986.
- [59] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Masson, 1987.
- [60] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer Science & Business Media, 10 nov. 2010.
- [61] J. Michael Fife and Manuel Martinez-Sanchez, *Two-Dimensional Hybrid Particle-In-Cell (PIC) Modeling of Hall Thrusters*, 24<sup>th</sup> IEPC, pap-240, September 1995, Moscow, Russia.
- [62] F. I. Parra, E. Ahedo, J. M. Fife, and M. Martínez-Sánchez, *A two-dimensional hybrid model of the Hall thruster discharge*, J. Appl. Phys. 100, 023304 (2006) ; 10.1063/1.2219165.
- [63] D. Escobar and E. Ahedo, *Improved electron formulation for a Hall thruster hybrid model*, 42<sup>nd</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 9-12 July 2006, Sacramento, California (AIAA 2006-4326).
- [64] G. J. M. Hagelaar, J. Bareilles, L. Garrigues, and J.-P. Boeuf, *Modelling of Stationary Plasma Thrusters*, Contrib. Plasma Phys. 44, No. 5-6, 529 – 535 (2004) / DOI 10.1002/ctpp.200410075.
- [65] J. Bareilles, *Modélisation 2D Hybride d'un Propulseur à Effet Hall pour Satellite*, thèse de doctorat, Spécialité : Physique et ingénierie des plasmas de décharge, Département : Physique, Chimie, Automatique, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Décembre 2002.
- [66] E. P. Furlani, *Permanent Magnet and Electromechanical Devices*, Academic Press Series in Electromagnetism, 2001.
- [67] R. Perrussel, *Méthodes multiniveau algébriques pour les éléments d'arête. Application à l'électromagnétisme*, thèse de doctorat, Spécialité : Mathématiques appliquées, Université de Lyon, France, Octobre 2005.
- [68] P. Puzo, *Note de Cours d'électromagnétisme classique*, Licence 3 et Magistère de Physique Fondamentale, (2010 - 2011).
- [69] V. Girault, and P. A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations Theory and Algorithms*, Springer Série in Computational Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1986.
- [70] J. L. Ferreira, et. al., *Plasma Diagnostic and Performance of a Permanent Magnet Hall Thruster*, 12<sup>th</sup> International Congress on Plasma Physics, 25-29 October 2004, Nice, France.
- [71] S. Mazouffre, G. Bourgeois, K. Dannenmayer and A. Lejeune, *Ionization and acceleration processes in a small, variable channel width, permanent-magnet Hall thruster*, J. Phys. D : Appl. Phys. 45 (2012) 185203 (7pp).
- [72] B. Silva Moraes et al., *A Permanent Magnet Hall Thruster for Pulsed Orbit Control of Lunar Polar Satellites.*, Journal of Physics : Conference Series 511 (2014) 012074.

- [73] D. C. Jiles, *Introduction to Magnetism and Magnetic Materials, Second Edition*, Chapman & Hall, 1998.
- [74] J. M. D. Coey, *Magnetism and Magnetic Materials*, Cambridge University Press, 2009.
- [75] N. V. Korovkin, V. L. Chechurin, and M. Hayakawa, *Inverse Problem in Electric Circuits and Electromagnetics*, Springer 2007.
- [76] S. Sanogo, F. Messine, C. Henaux and R. Vilamot, *Topology Optimization for Magnetic Circuits dedicated to Electric Propulsion*, *IEEE Trans. on Mag* : vol. 50, no. 12, 2014.
- [77] S. Sanogo, *Topologic Optimisation, Shape Optimisation and Sensitivity Analysis of Electromagnetic Devices*, Master-2 Thesis, ACSYON, University of Limoges, France, June 2012.
- [78] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Springer Series in Applied Mathematical Sciences, vol. 120, Springer, Berlin, 1996.
- [79] A. G. Ramm, *Inverse Problems : Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering*, Springer, Boston, 2005.
- [80] P. Di Barba, A. Savini, S. Wiak, *Field Models in Electricity and Magnetism*, Springer, 2008.
- [81] G. Allaire, *Conception optimale de structures*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007.
- [82] J. Sokolowski, J.-Paul Zolesio *Introduction to Shape Optimization : Shape Sensitivity Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [83] Edward J. Haug, Kyung K. Choi and Vadim Komkov, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Mathematics in science and engineering , vol. 177, Academic Press, Inc., 1986.
- [84] D.-H. Kim, K. S. Ship, and J. K. Sykulski, *Applying Continuum Design Sensitivity Analysis Combined With Standard EM Software to Shape Optimization in Magnetostatic Problems*, *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 40, no. 2, March 2004, pp. 1156-1158.
- [85] I.-han Park, J. L. Coulomb and Song-yop Hahn, *Design sensitivity analysis for nonlinear magnetostatic problems by continuum approach*, *J. Phys. III France* 2 (1992) 2045-2053, Classification Physics Abstracts, 02.60, November 1992.
- [86] J. K. Byun, and S. Y. Hahn, *Topology Optimization of Electrical Devices Using Mutual Energy and Sensitivity*, *IEEE Trans. on Mag.*, Vol. 35, no. 5, September 1999, pp. 3718-3720.
- [87] D. N. Dyck, and D. A. Lowther, *A Method of Computing the Sensitivity of Electromagnetic Quantities to changes in Materials and Sources*, *IEEE Trans. on Mag.*, Vol. 30, no. 5, September 1994, pp. 3415-3418.
- [88] A. G. Michell, *The limits of economy of material in frame-structures*, *Philosophical Magazine*, Vol. 8(47), pp. 589-597, 1904.



- [89] G. I. N. Rozvany, T. Sokół, V. Pomezanski, *Extension of Michell's theory to exact stress-based multi-load truss optimization*, 10<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, May 19 -24, 2013, Orlando, Florida, USA.
- [90] H. A. Eschenauer, V. V. Kobelev, A. Schumacher, *Bubble method for topology and shape optimization of structures*, Structural optimization, Volume 8, Issue 1 , pp 42-51, August 1994.
- [91] J. Sokołowski, and A. Żochowski, *On topological derivative in shape optimization*, Rapport de recherches, no. 3170, Mai 1997, 31 pages, INRIA Lorraine.
- [92] J. Sokołowski, and A. Żochowski, *Topological Derivatives of Shape Functionals for Elasticity Systems*, Mech. Struct. & Mach., vol. 29, no. 3, 2001, pp. 331-349.
- [93] N. A. André, J. Sokołowski, *Topological Derivatives in Shape Optimization*, Interaction of Mechanics and Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [94] M. Masmoudi, *The topological asymptotic*, Computational methods for control applications. Dedicated to Professor Jacques-Louis Lions on the occasion of his 70th birthday. Proceedings of the France-Japan workshop on computational methods for control applications, Tokyo, Japan, October 7-9, 1998, GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications 16, 53-72 (2002).
- [95] M. Hassine, M. Masmoudi, *The topological asymptotic expansion for the Quasi-Stokes problem*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, Volume : 10, Issue : 4, page 478-504, 2004.
- [96] M. Masmoudi, J. Pommier and B. Samet, *The topological asymptotic expansion for the Maxwell equations and some applications*, Institute of Physics Publishing, Inverse Problems 21 (2005) 547–564.
- [97] J. Rocha de Fariaa and A.A. Novotny, *On the Second Order Topological Asymptotic Expansion*, EngOpt 2008-International Conference on Engineering Optimization, Rio de Janeiro, Brazil, 01- 05, June, 2008.
- [98] S. Osher , J. A. Sethian, *Fronts Propagating with Curvature dépendent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations*, Journal of Computational Physics, vol. 79, pp. 12-49, 1988.
- [99] D. Adalsteinsson, J. A. Sethian, *A Fast Level Set Method for Propagating Interfaces*, Journal of Computational Physics, vol. 118, pp. 269-277, 1995.
- [100] D. Adalsteinsson, J. A. Sethian, *The Fast Construction of Extension Velocities in Level Set Methods*, Journal of Computational Physics, vol. 148, pp. 2-22, 1999.
- [101] Stanley Osher and Ronald P. Fedkiwy, *Level Set Methods : An Overview and Some Recent Results*, Journal of Computational Physics, vol. 169, pp. 463-502 (2001).
- [102] G. Allaire, F. Jouve, A. Toader, *A level-set method for shape optimization*, C.R. Acad. Sci. Paris, t., Série I, p. 1-6, 2002.

- [103] G. Allaire, F. Jouve, *A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 194 (2005), pp. 3269-3290.
- [104] G. Allaire, F. Jouve, A. Toader, *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, Journal of Computational Physics, vol. 194 (2004), pp. 363-393.
- [105] F. Jouve, H. Mechkour, *Conception optimale de mécanismes compliant par la méthode des lignes de niveaux*, L'object, vol. 8, no. 2 (2005), pp. 1-15.
- [106] Natasha Vermaak, et al., *Material interface effects on the topology optimization of multi-phase structures using a level set method*, Struct. Multidisc. Optim. (2014) 50 :623-644, DOI 10.1007/s00158-014-1074-2.
- [107] S. Amstutz, H. Andrä, *A new algorithm for topology optimization using a level-set method*, Journal of Computational Physics, vol. 216 (2006), pp. 573-588.
- [108] S. Amstutz, *Analyse de sensibilité topologique et applications en optimisation de formes*, HDR, Optimization and control., université d'Avignon, France, Décembre 2011.
- [109] M. Y. Wang, X. Wang, D. Guo, *A level set method for structural topology optimization*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192 (2003), 227-246.
- [110] S. CHEN, M. Y. WANG, *Conceptual design of compliant mechanisms using level set method*, Front. Mech. Eng. China (2006) 2 : 131-145 DOI 10.1007/s11465-006-0018-y.
- [111] S.Y. Wang, K.M. Lim, B.C. Khoo, M.Y. Wang, *An extended level set method for shape and topology optimization*, Journal of Computational Physics, vol. 221 (2007), pp. 395-421.
- [112] S. I. Park and S. Min, *Magnetic Actuator Design for Maximizing Force Using Level Set Based Topology Optimization*, IEEE Transaction on Magnetics, vol. 45, no. 5, pp. 2336-2339, May 2009.
- [113] S. I. Park and S. Min, *Design of Magnetic Actuator With Nonlinear Ferromagnetic Materials Using Level-Set Based Topology Optimization*, IEEE Transaction on Magnetics, vol. 46, no. 2, pp. 618-621, February 2010.
- [114] S. Chen, B. Merriman, S. Osher, and P. Smereka, *A Simple Level Set Method for Solving Stefan Problems*, Journal of Computational Physics, vol. 135 (1997), pp. 8-29.
- [115] G. Allaire, F. Jouve, *A Shape and Topology Optimization by the Level Set Method*, Third Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization, April 5-7, 2006, Nice, France, Book of abstracts, pp. 7-10.
- [116] N. P. Van Dijk, G. H. Yoon, F. Van Keulen, M. Langelaar, *A level-set based topology optimization using the element connectivity parameterization method*, Struct Multidisc Optim (2010) 42 :269-282, DOI 10.1007/s00158-010-0485-y.
- [117] N. P. van Dijk, K. Maute, M. Langelaar, F. van Keulen, *Level-set methods for structural topology optimization : a review*, Struct Multidisc Optim (2013) 48 :437-472, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

- [118] P. L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research note ; 69, Pitman Publishing Inc., (1982).
- [119] M.G. Crandall and P. L. Lions, *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 277, No. 1 (May, 1983), pp. 1-42
- [120] M. G. Crandall, L. C. Evans and P. L. Lions, *Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 282, No. 2, April 1984.
- [121] M. G. Crandall and P. L. Lions , *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Mathematics of Computation, Vol. 43, No. 167, July 1984, pp. 1-19.
- [122] D. Makhija and K. Maute, *Numerical instabilities in level set topology optimization with the extended finite element method*, Struct Multidisc Optim (2014) 49 :185-197, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [123] A. Bensoussan, J. L. Lions, Papanicolaou G., *Asymptotic analysis of periodic structures*, North-Holland Publ., 1978.
- [124] E. Sanchez-Palencia , *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, vol. 127, Springer Berlin Heidelberg, 1980.
- [125] L. Tartar, *Mathematical Tools for Studying Oscillations and Concentrations : from YOUNG Measures to H-Measures and Their Variants*, Multiscale Problems in Science and Technology, Challenges to Mathematical Analysis and Perspectives, Proceedings of the Conference on Multiscale Problems in Science and Technology, Dubrovnik, Croatia, 3-9 September 2000, pp. 1-84, Springer-Verlag Berlin, 2002.
- [126] L. Tartar, *The General Theory of Homogenization*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 7, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [127] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, translated from Russian to english by G. A. Yosifian, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [128] F. Murat, et L. Tartar, *Calcul des Variations et Homogénéisation*, Les Méthodes de l'Homogénéisation : Théorie et Applications en Physique, pp. 319-369, 1985, Eyrolles.
- [129] L. Murat, et L. Tartar, *Optimality Conditions and Homogeneization*, dans : Nonlinear Variational Problems (Marino A. et al., eds.), Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1985, pp. 1-8.
- [130] M. P. Bendsøe, and N. Kikuchi, *Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.71 (1988), pp. 197-224, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland).
- [131] K. Suzuki and N. Kikuchi , *A homogenization method for shape and topology optimization*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 93 (1991), pp. 291-318, North-Holland.

- [132] B. Hassani and E. Hinton, *Homogenization and Structural Topology Optimization : Theory, Practice and Software*, Springer-Verlag London Limited 1999.
- [133] G. Allaire, *Shape Optimization by the Homogenization Method*, Applied Mathematical Sciences, vol. 146, Springer-Verlag New York, Inc., 2002.
- [134] M. P. Bendsøe, *Optimal shape design as a material distribution problem*, Structural Optimization, vol.1, pp. 193-202, Springer-Verlag, 1989
- [135] Z. Hashin, and S. Shtrikman, *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 11, Issue 2, pp. 127-140, Elsevier Science B.V., 1963.
- [136] R. V. Kohn and R. Lipton, *Optimal Bounds for the Effective Energy of a Mixture of Isotropic, Incompressible, Elastic Materials*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, December 1988, Volume 102, Issue 4, pp. 331-350, Springer-Verlag.
- [137] R. V. Kohn and G. W. Milton, *On bounding the effective conductivity of anisotropic composites*, in Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media (Minneapolis, MN, 1984/1985), IMA Vol. Math. Appl., Vol. 1, pp. 97-125, Springer, New York, 1986.
- [138] G. W. Milton. and R. V. Kohn, *Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 36, No. 6, pp. 597-629, Pergamon Press plc., Great Britain, 1988.
- [139] A. V. Cherkaev and R. V. Kohn, *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 31, Springer Science+Business Media, New York, 1997.
- [140] G. W. Milton, *The Theory of Composites*, Monographs on Applied and Computational Mathematics, vol. 6, Cambridge University Press, Mai 2002.
- [141] A.V. Cherkaev, L.V. Gibiansky, *Coupled estimates for the bulk and shear moduli of a two-dimensional isotropic elastic composite*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 41, No. 5, pp. 937-980, Pergamon Press plc., Great Britain, 1993.
- [142] A. Cherkaev, *Variational Methods for Structural Optimization*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 140, Springer-Verlag New York, Inc, 2000.
- [143] C. F. Hvejsel and E. Lund, *Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization*, Struct Multidisc Optim (2011) 43 :811 - 825, DOI 10.1007/s00158-011-0625-z.
- [144] H.C. Cheng, N. Kikuchi and Z. D. Ma, *An improved approach for determining the optimal orientation of orthotropic material*, Structural Optimization, vol. 8, pp. 101-112, Springer-Verlag, 1994.
- [145] J. H. Luo and H. C. Gea, *Optimal orientation of orthotropic materials using an energy based method*, Structural Optimization, vol. 15, pp. 230-236, Springer-Verlag, 1998.
- [146] P. Pedersen, *On optimal orientation of orthotropic materials*, Structural Optimization, vol. 1, pp. 101-106, Springer-Verlag, 1989.

- [147] J. Leloup and J. Majak, *Optimal material orientation of nonlinear orthotropic materials*, Mechanics of Composite Materials vol. 35, Issue 3 , pp. 233-240, Kluwer Academic Publishers-Plenum , 1999.
- [148] G. I. N. Rozvany and M. (eds.) ,*Shape and Layout Optimization of Structural Systems and Optimality Criteria Methods*, International Centre for Mechanical Sciences, vol. 325, Springer Vienna, CISM Udine, 1992.
- [149] Julien Pommier, *L'Asymptotique Topologique en Electromagnétisme*, thèse de doctorat, spécialité : Mathématiques Appliquées, conception optimale de forme, Laboratoire : Mathématique pour l'Industrie et la Physique, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Mai 2002.
- [150] Thibaut Labbé , *Topology optimization methods for the design of electromagnetic actuators*, PhD thesis, department : electromechanic, Université catholique de Louvain, Ecole Polytechnique de Louvain, Belgique, Novembre 2011.
- [151] Plateforme de la société MathWork, [mathworks.com/products/matlab/](https://www.mathworks.com/products/matlab/)
- [152] D. Meeker, *Finite Element Method Magnetics Version 4.2 User's Manual*, October 16, 2010. [www.femm.info/wiki/HomePage](http://www.femm.info/wiki/HomePage)
- [153] G. Allaire, and O. Pantz, *Structural Optimization with FreeFem++*, Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 32, pp. 173-181, 2006.
- [154] O. Sigmund, *A 99 line topology optimization code written in Matlab*, Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 21, pp. 120-127, 2001.
- [155] K. Svanberg, *The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, Issue 2, pp. 359-373, 1987.
- [156] C. Zillober , *A globally convergent version of the method of moving asymptotes*, Structural optimization, Vol. 6, pp. 166-174, Springer-Verlag, 1993.
- [157] K. -U. Bletzinger, *Extended method of moving asymptotes based on second-order information*, Structural optimization, Vol. 5, pp. 175-183, 1993.
- [158] C. Fleury, *CONLIN : an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts* , Structural Optimization, Vol. 1, pp. 81-89, Springer-Verlag, 1989.
- [159] K. Liu and A. Tovar, *An efficient 3D topology optimization code written in Matlab*, Structural and Multidisciplinary Optimization Vol. 50, pp. 1175-1196, Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [160] D. N. Dyck and D. A. Lowther, *Automated Design of Magnetic Devices by Optimizing Material Distribution*, IEEE Transaction on Magnetics, vol. 32, No. 3, 1996, pp. 1188-1193.
- [161] T. Labbé, and B. Dehez, *Convexity-Oriented Mapping Method for the Topology Optimization of Electromagnetic Devices Composed of Iron and Coils*, IEEE Transaction on Magnetics, vol. 46, no. 5, 2010, pp. 1711-1785.
- [162] O. Sigmund, J. Peterson, *Numerical instabilities in topology optimization : a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dépendencies and local minima* . Struct. Optim., vol. 16, pp. 68-75, Springer-Verlag, 1998.

- [163] O. Sigmund and K. Maute, *Topology optimization approaches : A comparative review*, Struct Multidisc Optim (2013) 48 :1031-1055, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.
- [164] T. E. Bruns, D. A. Tortorelli, *Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, Issues 26-27, pp. 3443-3459, 2001.
- [165] T. E. Bruns, *A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization*, Struct Multidisc Optim (2005) 30 : 428-436, Springer-Verlag, 2005.
- [166] Sonia Calvel, *Conception d'organes automobiles par optimisation topologique*, thèse de doctorat, U.F.R. : Mathématique Informatique et Gestion, Discipline : Mathématique Appliquées, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Octobre 2004.
- [167] M. Stolpe, K. Svanberg, *An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization*, Journal Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 22 , pp. 116-124, Springer-Verlag 2001.
- [168] E. Dolan, and J. More., *Benchmarking optimization software with performance profiles*, Math. Prog. Series A, Vol. 91 (2), pp. 201-213, 2002.
- [169] F. Messine, *Méthode d'optimisation globale basée sur l'analyse d'intervalles pour la résolution de problèmes avec contraintes*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997.
- [170] A. Abraham, L. Jain and R. Goldberg, *Evolutionary Multi-objective Optimization : Theoretical Advances and Applications*, Advanced Information and Knowledge Processing, Springer-Verlag London Limited 2005.
- [171] X. Huang and Y.M. Xie, *Evolutionary Topology Optimisation Continuum Structure : Methods and Applications*, A John Wiley and Sons, Ltd., Publication, 2010.
- [172] X. Huang and Y.M. Xie, *Topology optimization of nonlinear structures under displacement loading*, Engineering Structures 30 (2008) 2057–2068
- [173] M. Stolpe, *On Models and Methods for Global Optimization of Structural Topology*, Doctoral Thesis, Optimization and Systems Theory, Department of Mathematics Royal Institute of Technology Stockholm, Sweden, 2003.
- [174] M.H. Rasmussen, M. Stolpe, *Global optimization of discrete truss topology design problems using a parallel cut-and-branch method*, Computers and Structures 86 (2008) 1527–1538.
- [175] M. Stolpe, *A Concept for Global Optimization of Topology Design Problem*, IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials : Status and Perspectives, 185–194, Springer, the Netherlands, 2006.
- [176] E. Hansen, *Global Optimization using Interval Analysis*, Marcel Dekker, Inc. 270 Madison Avenue, New York 100016, 1992.

- [177] R. E. Moore and C. T. Yang, *Interval Analysis I*, Technical Document, Lockheed Aircraft Corporation, Missile and Space Division, Sunnyvale, California, USA, September 1958.
- [178] R. E. Moore, *Interval Analysis*, Englewood Cliff, New Jersey : Prentice-Hall, 1966.
- [179] R. E. Moore, *Methods and Applications of Interval Analysis*, Studies in Applied Mathematics, SIAM Philadelphia/1979.
- [180] K. Ichida and Y. Fujii, *An Interval Arithmetic Method for Global Optimization*, Computing, vol. 23, Issue 1, pp. 85-97, 1979.
- [181] E. Hansen, *Global Optimization Using Interval Analysis - The One-Dimensional Case*, J. Optim. Theory Appl., vol. 29, pp. 331-344, 1979.
- [182] E. Hansen, *Global Optimization Using Interval Analysis - The Multi-Dimensional Case*, Numer. Math., vol. 34, pp. 247-270, 1980.
- [183] H. Ratschek, *Inclusion Functions and Global Optimization*, Mathematical Programming, vol. 33, pp. 300-317, 1985.
- [184] H. Ratschek and J. Rokne, *Efficiency of a Global Optimization Algorithm*, SIAM J. Numer. Analysis, vol. 24, pp. 1191-1201, 1987.
- [185] H. Ratschek and J. Rokne, *New Computer Methods for Global Optimization*, Mathematics and its applications, Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1988.
- [186] H. Ratschek and R. L. Voller, *What can interval analysis do for global optimization ?*, Journal of Global Optimization, Vol. 1, Issue 2, pp. 111-130, 1991.
- [187] R. B. Kearfott, *Rigorous Global Search : Continuous Problems*, Kluwer, Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [188] E. M.T. Hendrix, B. G.-Tóth, *Introduction to Nonlinear and Global Optimization*, Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2010.
- [189] N. Revol, *Introduction à l'arithmétique par intervalle*, Research Report, RR-4297, 2001, inria-00072290, Submitted on 23 May 2006.
- [190] S. Abolmasoumi, *A method for calculating interval inverse matrix*, Journal of mathematics and computer science , Vol. 10, pp. 228-234, 2014.
- [191] T. Nirmala, D. Datta and H.S. Kushwaha, *Inverse Interval Matrix : A New Approach*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, No. 13, pp. 607-624, 2011.
- [192] S. M. Rump, *INTLAB - INTerval LABoratory*, Tibor Csendes, editor, Developments in Reliable Computing, pp. 77-104, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. [www.ti3.tuhh.de/rump/](http://www.ti3.tuhh.de/rump/)
- [193] R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Le cours de physique de Feynman - Electromagnétisme 1*, Dunod, Paris, 1999.
- [194] J. D. Jackson, *Electrodynamique classique : cours et exercices d'électromagnétisme*, Dunod, Paris, 2001.
- [195] L. Garrigues et al., *Design and first test campaign results with a new flexible magnetic circuit for a Hall thruster*, 33<sup>th</sup> IEPC, pap. 250, October 6-10, 2013, The George Washington University, USA.

- [196] N. V. Blinov, et al., *Experimental Investigation of Magnetic Field Topology Influence on Structure of Accelerating Layer and Performance of Hall Thruster*, 29<sup>th</sup> IEPC, Princeton University, October 31-November 4, 2005, USA.



